Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2012-13.
Geometria. Canale L-PE (Prof. Paolo Piazza).
Compito a casa del 31/10/12 (quinto compito)

Esercizio 1. Vero o Falso :

- 4 vettori in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente dipendenti
- 6 vettori in $\mathbb{R}^4$ sono sempre linearmente dipendenti.
- 4 vettori in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente indipendenti

Giustificare le risposte.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ lo spazio vettoriale che ha come insieme di vettori i numeri reali $\mathbb{R}$ e come campo di scalari i numeri razionali $\mathbb{Q}$. Le operazioni sono indotte dalle usuali operazioni sui reali. Dimostrare che $\dim \mathbb{R}_{\mathbb{Q}} \geq 2$. (Suggerimento: dimostrare che i vettori $\underline{v}_1 = 1$ e $\underline{v}_2 = \sqrt{2}$ sono linearmente indipendenti...).

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 0, 1, 0)\,,\ \underline{v}_2 = (0, 1, 0, 0)\,,\ \underline{v}_3 = (0, 0, 1, 0).$$

Si può verificare che questi 3 vettori sono linearmente indipendenti.
Determinare una base per i seguenti sottospazi:
$W_1 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 74\underline{v}_2 - \sqrt{2}\underline{v}_3)$
$W_2 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$
$W_3 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 2\underline{v}_2, \underline{v}_1 - 2\underline{v}_2)$

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Consideriamo i sottospazi

$$U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}\,, \quad W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Decidere se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Esercizio 5. Come l'esercizio 1 ma con $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ e $W = \mathrm{Span}((1, 1, 1))$.

Esercizio 6. Consideriamo l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Scrivere l'espressione di L_A: $L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \ldots.$ Stabilire se L_A è iniettiva. Stabilire se L_A è surgettiva. Giustificare. Determinare l'immagine tramite L_A del vettore $(1, 2, 1)$. Determinare l'immagine tramite L_A dei vettori della base canonica.

Esercizio 7. Sia $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Scrivere l'espressione di L_A, come nell'esercizio precedente. Determinare la dimensione del nucleo di L_A. Determinare una base per lo spazio immagine.

Esercizio 8. Spiegare perché esiste ed è unica l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(1, 1, 1) = (2, 3, 2), \quad F(0, 1, 1) = (1, 3, 2), \quad F(0, 1, -1) = (1, 1, -2).$$

(Per ragioni tipografiche scriveremo spesso i vettori di $\mathbb{R}^n$ per righe.) Determinare l'immagine tramite F degli elementi della base canonica: $\underline{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\underline{e}_3 = (0, 0, 1)$. (*Suggerimento*: esprimere i vettori della base canonica come combinazioni lineari dei vettori $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 1, -1)$ e applicare la linearità.)