Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2012-13.
Geometria. Canale L-PE (Prof. Paolo Piazza).
Compito a casa del 31/10/12 (quinto compito).
SOLUZIONI

Soluzione es. 1. La prima affermazione è falsa. Per dimostrarlo dobbiamo mostrare che in $\mathbb{R}^6$ è possibile trovare quattro vettori linearmente indipendenti. Un modo è il seguente.
Sappiamo che $\mathbb{R}^6$ ha dimensione 6. Una sua base $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4, \underline{b}_5, \underline{b}_6\}$ è costituita da 6 vettori linearmente indipendenti tra loro. Ma allora, in particolare i 4 vettori $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4\}$ sono linearmente indipendenti.

La seconda affermazione è vera. Se avessimo in $\mathbb{R}^4$ sei vettori linearmente indipendenti, allora la dimensione di $\mathbb{R}^4$ sarebbe almeno 6, ma sappiamo che la dimensione di $\mathbb{R}^4$ è uguale a 4.

Infine, l'ultima affermazione è falsa. Per fornire un controesempio basta prendere tre vettori a piacere in $\mathbb{R}^6$ e scegliere come quarto vettore una combinazione lineare dei primi tre.

Soluzione es. 2. Seguiamo il suggerimento e dimostriamo che i due numeri reali 1 e $\sqrt{2}$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$, ovvero che l'equazione $x \cdot 1 + y \cdot \sqrt{2} = 0$ con $x, y \in \mathbb{Q}$ ha solamente la soluzione banale $(x, y) = (0, 0)$. Analizziamo separatamente le due possibilità $y = 0$ e $y \neq 0$. Se $y = 0$, l'equazione $x + y\sqrt{2} = 0$ si riduce a $x = 0$ ovvero la soluzione è $(x, y) = (0, 0)$. Se invece $y \neq 0$, da $x + y\sqrt{2} = 0$ ricaviamo $\sqrt{2} = -x/y \in \mathbb{Q}$, ovvero che $\sqrt{2}$ è un numero razionale. Ma questo è assurdo e rimaniamo con la solita possibilità $y = 0$ e dunque con la sola soluzione $(x, y) = (0, 0)$. Abbiamo così provato che in $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ ci sono almeno due vettori linearmente indipendenti, il che implica $\dim \mathbb{R}_{\mathbb{Q}} \geq 2$. Si può poi dimostrare (ma non abbiamo gli strumenti per farlo) che in $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ ci sono infiniti vettori linearmente indipendenti: $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ è un esempio di spazio vettoriale di dimensione infinita.

Soluzione es. 3. Ricordiamo un'utile notazione: se un sottoinsieme $W \subset V$ è un sottospazio vettoriale di V, scriviamo $W \leq V$.
Verifichiamo che i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti: l'equazione $\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 = 0$ scritta per esteso è

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

ed ha evidentemente la sola soluzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$. Determiniamo ora una base per i sottospazi W_1, W_2 e W_3. Osserviamo che tutti i generatori di W_1 sono combinazioni lineari di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$, dunque $W_1 \leq \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$. D'altronde i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ appartengono a W_1 e dunque $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) \leq W_1$. Ne segue $W_1 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$. Poiché i tre vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti, essi sono una base per il sotttospazio che generano, e dunque una base di W_1 è $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$. Con ragionamento perfettamente analogo si prova che $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è una base di W_2. Infine, per quanto riguarda W_3 osserviamo che tutti i generatori di W_3 sono combinazioni lineari di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ e dunque $W_3 \leq \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$. I due vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti perché non-proporzionali: quindi sono una base per $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ che pertanto ha dimensione 2. Questo ci dice che $\dim W_3 \leq 2$; pertanto in W_3 possiamo trovare al più 2 vettori linearmente indipendenti e, inoltre, se troviamo 2 vettori indipendenti in W_3 questi sono una base. Si verifica facilmente che $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$ e $\underline{v}_1 - \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti, per cui $\{\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 - \underline{v}_2\}$ è una base di W_3. Osserviamo che W_3 viene ad essere un sottospazio bidimensionale di $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$, che ha dimensione 2. Ne segue $W_3 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$. Questo fatto può essere dimostrato direttamente, mostrando che $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in W_3$. Infatti si ha

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{2}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \frac{1}{2}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$$
$$\underline{v}_2 = \frac{1}{2}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) - \frac{1}{2}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$$

Soluzione esercizio 4. Sappiamo che se $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ allora $n = \dim \mathrm{Ker}\, A + \mathrm{rg} A$, dove il nucleo di A,

$$\mathrm{Ker}\, A \equiv \mathrm{Ker}\, L_A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid L_A \underline{x} = \underline{0}\},$$

altri non è che *il sottospazio* di $\mathbb{R}^n$ costituito dalle soluzioni del sistema lineare *omogeneo* $A\underline{x} = \underline{0}$. Questo vuol dire che $\dim \mathrm{Ker}\, A = n - \mathrm{rgA}$. In parole, *la dimensione del sottospazio di* $\mathbb{R}^n$ *costituito dalle soluzioni di un sistema lineare omogeneo* $A\underline{x} = \underline{0}$ *è data dal numero delle incognite meno il rango della matrice dei coefficienti del sistema.* Vi ricordo (libro di testo, Def 5.3 + Es 5.12) che il rango di A è il rango di L_A, e cioè, per definizione, la dimensione dell'immagine di L_A.
Nel nostro caso U è l'insieme delle soluzioni di un sistema di **1** equazione in **3** incognite: $U = \mathrm{Ker}\, A$ con $A = |1 \;\; -1 \;\; -1| \in M_{13}(\mathbb{R})$. Ma allora $\dim U = 3 - \mathrm{rg} A$. Ma $\mathrm{rgA} = 1$: infatti, in generale, $\mathrm{rg} A$ è la dimensione di $\mathrm{Im}\, L_A$; ora, l'immagine di L_A è costituita dallo span delle colonne di A perché la j-ma colonna di A è proprio $L(\underline{e}_j)$ e sappiamo che $\mathrm{Im}\, L_A$ è uguale allo span dei $L_A(\underline{e}_j)$ (Lemma 5.6 + Esempio 5.12). Quindi, nel nostro caso $\mathrm{rg} A \leq 3$; d'altra parte $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ e sappiamo che in $\mathbb{R}$ c' è al più 1 vettore linearmente indipendente; dato che la prima colonna è linearmente indipendente perché non-nulla concludiamo che $\mathrm{rg} A = 1$ Quindi, tornando all'esercizio, si ha $\dim U = 3 - 1 = 2$. Conclusione: $\dim U = 2$. Analogamente $\dim W = 2$. Ma allora, per Grassmann,

$$\dim(U \cap W) = 2 + 2 - \dim(U + W) = 4 - \dim(U + W)\,.$$

Ora, $U + W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ ed ha quindi dimensione ≤ 3. Ma allora $\dim(U \cap W) \geq 1$. In ogni caso $(U \cap W) \neq \underline{0}$ e $\mathbb{R}^3$ non è somma diretta.

Osservazione 1. Ovviamente avremmo potuto calcolare l'intersezione di U e di W che è costituita dai vettori $\underline{x}$ di $\mathbb{R}^3$ che soddisfano sia $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ che $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$; $U \cap W$ è quindi uguale al sottospazio delle soluzioni del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

Avremmo potuto risolvere esplicitamente il sistema (è un sistema non-quadrato ma non è difficile risolverlo per sostituzione) ed avremmo trovato che $U \cap W = \mathrm{Span}((1, -2, 3))$.

Osservazione 2. Notiamo anche che senza risolvere il sistema, ma osservando che $U \cap W$ è dato dalle soluzioni di (1), avremmo potuto subito concludere che $\dim(U \cap W) = 1$. Infatti:

$$\dim(U \cap W) = 3 - \mathrm{rg} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ma la matrice A in questa formula ha rango 2. Vediamolo: rg$A$ è la dimensione di $\operatorname{Im} L_A$; l'immagine di L_A è costituita dallo span delle colonne di A (perché la j-ma colonna di A è proprio $L(\underline{e}_j)$ e sappiamo che $\operatorname{Im} L_A$ è uguale allo span dei $L_A(\underline{e}_j)$ (Lemma 5.6 + Esempio 5.12)). Quindi, nel nostro caso rg$A \leq 3$; d'altra parte $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e sappiamo che in $\mathbb{R}^2$ ci sono al più 2 vettori linearmente indipendenti; dato che le prime due colonne sono linearmente indipendenti perché non-proporzionali concludiamo che rg$A = 2$. Conclusione: $\dim(U \cap W) = 3 - 2 = 1$.

Soluzione esercizio 5. Sappiamo che U ha dimensione 2. È ovvio che W ha dimensione 1. Inoltre $W = \{(\alpha, \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$. Ma allora è subito visto che $U \cap W = \{\underline{0}\}$ (perché (α, α, α) soddisfa l'equazione che definisce U se e solo se $\alpha = 0$). Ne segue che $\dim(U \cap W) = 0$. Ma allora, per Grassmann, $\dim(U + W) = 2 + 1 - 0 = 3$. Ne segue che $U + W \subset \mathbb{R}^3$ e $\dim(U + W) = 3$; ma allora $U + W = \mathbb{R}^3$. Conclusione: in questo caso $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ perché $U + W = \mathbb{R}^3$ e $U \cap W = \{\underline{0}\}$.

Soluzione esercizio 6.

$$L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 \end{vmatrix}$$

L_A è iniettiva se e solo se $\operatorname{Ker} L_A = \{\underline{0}\}$. Occorre allora calcolare

$$\operatorname{Ker} L_A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid L_A \underline{x} = \underline{0}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \}$$

Utilizzando Gauss è facile vedere che $\operatorname{Ker} L_A = \{\underline{0}\}$. Ne segue che L_A è iniettiva. Per il teorema della dimensione (andiamo da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$) è anche suriettiva. Ne segue che L_A è biettiva. L'immagine di $(1, 2, 1)$ è data sostituendo nella definizione di L_A,

$$L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 \end{vmatrix},$$

i valori 1,2 e 1 al posto di x_1, x_2 e x_3 rispettivamente. Otteniamo il vettore $(6, 3, 0)$. L'immagine del j-mo vettore della base canonica è la j-ma colonna della matrice A.

Soluzione esercizio 7.

$$L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ -2x_2 + 5x_3 \end{vmatrix}$$

Per determinare la dimensione del nucleo troviamo prima una base per lo spazio immagine (in ogni caso questo è un quesito al quale dobbiamo rispondere). Sulla base delle soluzioni degli esercizi precedenti dobbiamo quindi determinare una base per lo spazio generato dalle colonne di A; il numero di elementi in questa base è per definizione la dimensione di $\operatorname{Im} L_A$ e si ha $\dim \operatorname{Ker} A = 3 - \dim \operatorname{Im} L_A \equiv 3 - \text{rg}A$. Ora, le prime due colonne sono ovviamente linearmente indipendenti perché non-proporzionali. Dobbiamo quindi decidere se tutte e tre le colonne sono o meno linearmente indipendenti. Questo lo sappiamo fare perché il problema si riduce ad un sistema di 3 equazioni nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; si scopre che il sistema ha soluzioni non banali e quindi i 3 vettori non sono linearmente indipendenti. Ne segue che una base di $\operatorname{Im} L_A$ è costituita dalle prime due colonne. In particolare $\dim \operatorname{Im} L_A = 2$ e $\dim \operatorname{Ker} L_A = 3 - 2 = 1$.

Soluzione esercizio 8. Basta verificare che i vettori

$$\underline{v}_1 = (1,1,1), \quad \underline{v}_2 = (0,1,1), \quad \underline{v}_3(0,1,-1)$$

sono una base di $\mathbb{R}^3$ perché allora possiamo applicare la Proposizione 5.2 del libro di Abate-de Fabritiis. Si verifica con il solito metodo già visto varie volte che i tre vettori sono linearmente indipendenti. Sono quindi una base in $\mathbb{R}^3$.

Per determinare $F(1,0,0)$, $F(0,1,0)$, $F(0,0,1)$ dobbiamo espimere i vettori $(1,0,0),(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ in funzione di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ e poi applicare la linearità. Si ha $(1,0,0) = \underline{v}_1 - \underline{v}_2$, $(0,1,0) = \frac{1}{2}(\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$, $(0,0,1) = \frac{1}{2}(\underline{v}_2 - \underline{v}_3)$ e quindi

$$F(1,0,0) = F(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = F(\underline{v}_1) - F(\underline{v}_2) = (2,3,2) - (1,3,2) = (1,0,0)$$

$$F(0,1,0) = F(\frac{1}{2}(\underline{v}_2 + \underline{v}_3)) = \frac{1}{2}((1,3,2) + (1,1,-2)) = (1,2,0)$$

$$F(0,0,1) = F(\frac{1}{2}(\underline{v}_2\underline{v}_3)) = \frac{1}{2}((1,3,2) - (1,1,-2)) = (0,1,2)$$