

Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2012-13.
Geometria. Canale L-PE (Prof. Paolo Piazza).
Compito a casa del 27/10/12 (quarto compito)

Esercizio 1. Una matrice $A = (a_{ij}) \in M_{nn}(\mathbb{R})$ è detta *simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j . Una matrice A è detta *antisimmetrica* se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni i, j .

1.1. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche è un sottospazio.

1.2. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche è un sottospazio.

1.3 Nel caso $n = 3$ determinare una base del sottospazio $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ e una base del sottospazio $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a tre. Si consideri il sottoinsieme

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) = 0\}$$

Stabilire se W è un sottospazio. Stesso esercizio per

$$U = \{q(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid q(2) = 4\}.$$

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}[x]$ e sia $p(x) = 1 + x + x^2 + 5x^4$. Consideriamo $q(x) = x^2 + 5x^4$. Stabilire se $q(x) \in \text{Span}(p)$.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale e $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ vettori linearmente indipendenti. Verificare che se $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$, $c_j \neq 0 \forall j$, allora i vettori

$$c_1 \underline{v}_1, \dots, c_k \underline{v}_k$$

sono anche linearmente indipendenti.

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verificare che questi 3 vettori formano una base di \mathbb{R}^3 . Determinare le coordinate del vettore $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$ in questa nuova base di \mathbb{R}^3 .