Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2012-13.
Geometria. Canale L-PE (Prof. Paolo Piazza).
Compito a casa del 27/10/12 (quarto compito).
SOLUZIONI.

Soluzione esercizio 1. Siano A e B due matrici simmetriche e λ un numero reale. Dobbiamo mostrare che anche $A+B$ e λA sono matrici antisimmetriche. Si ha

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = (A+B)_{ji}$$
$$(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} = \lambda \cdot a_{ji} = (\lambda A)_{ji}$$

dunque $A+B, \lambda A \in \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})$.

La dimostrazione per lo spazio delle matrici antisimmetriche è perfettamente analoga: se A e B sono due matrici anti simmetriche e λ un numero reale, allora

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = -a_{ji} - b_{ji} = -(A+B)_{ji}$$
$$(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} = -\lambda \cdot a_{ji} = -(\lambda A)_{ji}$$

dunque $A+B, \lambda A \in \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$.

Una base di $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ è data dalle 6 matrici

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Una base di di $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$ è invece data dalle 3 matrici

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

Notiamo che queste 9 matrici tutte insieme formano un insieme di generatori di $M_{33}(\mathbb{R})$ (verificatelo). Quindi $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R}) + \mathcal{S}_{33}(\mathbb{R}) = M_{33}(\mathbb{R})$. Dato che poi si ha anche (molto facile) $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_{33}(\mathbb{R}) = \underline{0}$ concludiamo che

$$\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_{33}(\mathbb{R}) = M_{33}(\mathbb{R}).$$

Soluzione esercizio 2. Il sottoinsieme W è un sottospazio di $\mathbb{R}_3[x]$. Infatti, presi $p(x), q(x)$ in W e $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha

$$(p+q)(1) = p(1) + q(1) = 0$$
$$(\lambda p)(1) = \lambda \cdot p(1) = 0$$

dunque $p(x) + q(x) \in W$ e $\lambda p(x) \in W$. Il sottoinsieme U, invece, non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[x]$. Ad esempio il polinomio zero non appartiane ad U.

Soluzione esercizio 3. Il polinomio $q(x)$ non appartiene a $\mathrm{Span}(p)$. Infatti se $q \in \mathrm{Span}(p)$, si avrebbe $q(x) = \lambda p(x)$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$, ovvero

$$x^2 + 5x^4 = \lambda(1 + x + x^2 + 5x^4)$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Ma l'equazione scritta sopra è equivalente a

$$\lambda + \lambda x + (\lambda - 1)x^2 + 5(\lambda - 1)x^4 = 0$$

ovvero[1] al sistema

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 0 \\ \lambda - 1 = 0 \\ 5\lambda - 5 = 0 \end{cases}$$

che evidentemente non ha alcuna soluzione.

Soluzione esercizio 4. Consideriamo l'equazione

$$\alpha_1(c_1\underline{v}_1) + \alpha_2(c_2\underline{v}_2) + \cdots + \alpha_k(c_k\underline{v}_k) = 0$$

La si può riscrivere come

$$(\alpha_1 c_1)\underline{v}_1 + (\alpha_2 c_2)\underline{v}_2) + \cdots + (\alpha_k c_k)\underline{v}_k = 0$$

Poiché i vettori $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ sono linearmente indipendenti, l'unica soluzione di quest'ultima equazione è

$$\alpha_1 c_1 = \alpha_2 c_2 = \cdots = \alpha_k c_k = 0$$

Ma $c_1, \dots, c_k \neq 0$ e dunque deve essere

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0,$$

ovvero, i vettori $c_1\underline{v}_1, \dots, c_k\underline{v}_k$ sono linearmente indipendenti.

Soluzione esercizio 5. Si tratta di 3 vettori in $\mathbb{R}^3$. per mostrare che sono una base basta mostrare che sono linearmente indipendenti. L'equazione

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 = 0$$

è equivalemte al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

La matrice associata al sistema è

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Osserviamo che avremmo potuto scrivere la matrice del sistema direttamente dai vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$. Applichiamo l'algoritmo di eliminazione gaussiana alla matrice del sistema:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 \end{array}\right|$$

Tutti i pivot sono diversi da zero. la matrice del sistema è pertanto non singolare, ed il sistema ammette un' unica soluzione. Trattandosi di un sistema omogeneo, quest'unica soluzione deve essere la soluzione banale.

[1] Quella scritta sopra è un'identità di polinomi e non un'equazione nella variabile x. Stiamo cioè chiedendo che il polinomio $\lambda + \lambda x + (\lambda - 1)x^2 + 5(\lambda - 1)x^4$ sia *identicamente* nullo, e non quali siano i valori di x che lo annullano.

Determinare le coordinate del vettore $\underline{e}_2$ nella base $\underline{v}_1, \underline{v}_2\underline{v}_3$ significa determinare i tre numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ per i quali risulta

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 = \underline{e}_2$$

Arriviamo così al sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

La matrice associata al sistema è

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Osserviamo che anche in questo caso avremmo potuto scrivere la matrice del sistema direttamente dai vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ ed $\underline{e}_2$. Applicando l'algoritmo di eliminazione gaussiana alla matrice del sistema troviamo:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 3/5 & -7/5 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -7/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 \end{array}\right|$$

Le coordinate di $\underline{e}_2$ nella base $\underline{v}_1, \underline{v}_2\underline{v}_3$ sono pertanto $(-1/3, -2/3, -7/3)$; vale a dire

$$\underline{e}_2 = -\frac{1}{3}\underline{v}_1 - \frac{2}{3}\underline{v}_2 - \frac{7}{3}\underline{v}_3$$