Corso di Laurea Magistrale a.a. 2011-12

Geometria Superiore. (Prof. P. Piazza)

Esame scritto del 16/07/2012

Risolvere **due** fra i seguenti sette esercizi.

Esercizio 1. Sia $L := E_1(\mathbb{C}^{n+1})$ il fibrato universale su $\mathbb{C}P^n$. Sappiamo che L è un fibrato complesso di rango 1 e olomorfo. Consideriamo in particolare $\mathbb{C}P^1$. Descrivere le funzioni di transizione di L^k, $k \in \mathbb{N}$ (con L^k uguale al prodotto tensoriale di L con se stesso k volte). Descrivere le funzioni di transizione di $(L^*)^k$. Poniamo $L^{-k} = (L^*)^k$.
Vero o falso : $\ell \neq k \Rightarrow$ *L^ℓ e L^k non sono isomorfi.*

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento. Supponiamo che per ogni coppia $(\alpha, \beta) \in A \times A$ sia assegnata una funzione continua

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$$

e che questa collezione di mappe verifichi le seguenti proprietà:

1) $g_{\alpha\alpha}(m) = \mathrm{Id}_{k \times k}\ \forall m \in U_\alpha$

2) $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$ in $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Sia $\widehat{E}$ l'unione disgiunta dei $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$; introduciamo una relazione d'equivalenza $\mathcal{R}$ in $\widehat{E}$ come segue

$$U_\alpha \times \mathbb{R}^k \ni (x, e)\mathcal{R}(y, f) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k \Leftrightarrow x = y \text{ e } f = g_{\alpha\beta}(x)e$$

Sia E lo spazio quoziente dotato della topologia indotta e sia $\pi : E \to X$ la mappa che associa alla classe d'equivalenza di (x, e) il punto $x \in X$.
Verificare che (E, π, X) è un fibrato vettoriale (continuo) di rango k.
Verificare che se M è una varietà differenziabile e le $g_{\alpha\beta}$ sono C^∞ allora (E, π, M) può essere dotato di una struttura di fibrato reale C^∞.
Verificare che se M è una varietà complessa, le $g_{\alpha\beta}$ sono a valori in $GL(k, \mathbb{C})$ e sono, inoltre, olomorfe, allora (E, π, M) può essere dotato di una struttura di fibrato olomorfo.

Esercizio 3. Sia M una varietà differenziabile orientabile di dimensione 4ℓ. Fissiamo indici $i_1, \dots, i_k$ tali che $i_1 + \cdots + i_k = \ell$ e definiamo il numero di Pontrjagin associato a $i_1, \dots, i_k$ come

$$\int_M p_{i_1}(M) \wedge \cdots \wedge p_{i_k}(M)$$

Supponiamo ora che M sia il bordo di una varietà orientabile di dimensione $4\ell + 1$: $M = \partial W$. Dimostrare che allora tutti i numeri di Pontrjagin sono nulli.

(Suggerimenti: (i) utilizzando la normale al bordo si ha $TW|_{\partial W} \equiv TW|_M = TM \oplus 1$, dove abbiamo denotato con 1 un fibrato banale di rango 1. (ii) Utilizzare il teorema di Stokes.)

Esercizio 4. Consideriamo nuovamente $\mathbb{C}P^1$. Definire una metrica hermitiana h su $\mathbb{C}P^1$ in modo tale che h sia data da $1/((1+|z|^2))^2$ nella carta $U = \{[z_0, z_1] \,|\, z_0 \neq 0\}$ con coordinata $z = z_1/z_0$. Scrivere la curvatura associata alla connessione complessa hermitiana e dimostrare che

$$\int_{\mathbb{C}P^1} c_1(T^{1,0}\mathbb{C}P^1) = 2 = \int_{\mathbb{C}P^1} e(T\mathbb{C}P^1). \tag{1}$$

Esercizio 5. Utilizzando la successione di Mayer-Vietoris, calcolare la coomologia di de Rham di S^n.
Suggerimento: potete ad esempio procedere per induzione su n.

Esercizio 6. Verificare che il simbolo principale dell'operatore $d : C^\infty(M, \Lambda^k M) \to C^\infty(M, \Lambda^{k+1} M)$ (differenziale esterno) è dato da

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(d)(\xi)(\omega_x) = i\xi \wedge \omega_x \quad \forall \xi \in T^*_x M \,, \forall \omega_x \in \Lambda^k_x M \,.$$

Dedurne che il complesso di de Rham è un complesso *ellittico*. Analogamente, determinare il simbolo principale dell'operatore

$$\overline{\partial} : C^\infty(M, \Lambda^{k,\ell} M) \to C^\infty(M, \Lambda^{k,\ell+1} M)$$

su una varietà complessa M e dedurne che il complesso di Dolbeault è ellittico.

Esercizio 7. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto e consideriamo l'insieme $\tilde{S}^m(U \times \mathbb{R}^n)$ costituito da tutte le funzioni $p(x,\xi) \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^n)$ tali che per ogni compatto $K \subset U$, $\forall \alpha, \forall \beta, \exists\, C_{K,\alpha,\beta}$ tale che

$$|D^\alpha_x D^\beta_\xi p(x,\xi)| \leq C_{K,\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m-|\beta|} \quad x \in K, \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

In altre parole, non richiediamo che p abbia x-supporto compatto ma richiediamo una stima su ogni compatto di U. Sia $u \in C^\infty_c(U)$; definiamo

$$Pu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} p(x,\xi)\hat{u}(\xi) e^{i<x,\xi>} d\xi$$

Verificare che P definisce un operatore lineare

$$P : C^\infty_c(U) \to C^\infty(U) \,.$$