Corso di Geometria Superiore. a.a. 2011/12

Compito del 8/6/2012 (ottavo ed ultimo compito)

Esercizio 1. Sia M una varietà compatta e sia $P \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M;E,F)$ un operatore pseudodifferenziale ellittico. Dimostrare che la proiezione ortogonale Π su $\mathrm{Ker}P$ è un operatore regolarizzante: $\Pi \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{cl}}$. (Suggerimento: utilizzare una base ortonormale $\{\phi_j\}_{j=1}^n$ del nucleo e scrivere Π come $\sum(\cdot,\phi_j)\phi_j$.)

Esercizio 2. Verificare che il simbolo principale dell'operatore $d : C^\infty(M,\Lambda^k M) \to C^\infty(M,\Lambda^{k+1}M)$ (differenziale esterno) è dato da

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(d)(\xi)(\omega_x) = i\xi \wedge \omega_x \quad \forall \xi \in T^*_x M\,, \forall \omega_x \in \Lambda^k_x M\,.$$

Dedurne che il complesso di de Rham è un complesso *ellittico*. Analogamente, determinare il simbolo principale dell'operatore

$$\overline{\partial} : C^\infty(M,\Lambda^{k,\ell}M) \to C^\infty(M,\Lambda^{k,\ell+1}M)$$

su una varietà complessa M e dedurne che il complesso di Dolbeault è ellittico.

Esercizio 3. Consideriamo l'operatore

$$P := d + d^* : \Omega^{\mathrm{pari}}(M) \to \Omega^{\mathrm{dispari}}(M).$$

Dimostrare che questo operatore è ellittico (Suggerimento: considerare P^*P.). Consideriamo il complesso di de Rham $\{\Lambda^*M, d_*\}$: dimostrare che

$$\mathrm{ind}(\{\Lambda^*M, d_*\}) = \mathrm{ind}(d + d^*_{|_{\Omega^{\mathrm{pari}}}}).$$

Esercizio 4. Consideriamo l'operatore

$$P := \overline{\partial} + \overline{\partial}^*_{|_{\Omega^{p,\mathrm{pari}}}}$$

Dimostrare che questo operatore è ellittico (Suggerimento: considerare P^*P.). Verificare che il suo indice è uguale all'indice del complesso di Dolbeault $\{\Omega^{p,*}, \overline{\partial}_*\}$

Esercizio 5. Dimostrare che $H^p(\mathbb{C}P^n, \Omega^q_{\mathcal{O}})$ è isomorfo a $\mathbb{C}$ se $p = q \leq n$ ed è zero altrimenti. In particolare $H^0(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O})$ è isomorfo a $\mathbb{C}$. Spiegare perché, in generale, $H^0(M, \mathcal{O})$ è isomorfo a $\mathbb{C}$ per ogni varietà complessa connessa e compatta.