Corso di Geometria Superiore. a.a. 2011/12

Compito del 1/6/2012 (settimo compito)

Esercizio 1. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto e consideriamo l'insieme $\tilde{S}^m(U \times \mathbb{R}^n)$ costituito da tutte le funzioni $p(x, \xi) \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^n)$ tali che per ogni compatto $K \subset U$, $\forall \alpha, \forall \beta, \exists\, C_{K,\alpha,\beta}$ tale che

$$(1) \qquad |D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x, \xi)| \le C_{K,\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m-|\beta|} \quad x \in K, \xi \in \mathbb{R}^n$$

In altre parole, non richiediamo che p abbia x-supporto compatto ma richiediamo una stima su ogni compatto di U. Sia $u \in C_c^\infty(U)$; definiamo

$$Pu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} p(x, \xi)\hat{u}(\xi)e^{i<x,\xi>}d\xi$$

Verificare che P definisce un operatore lineare

$$P : C_c^\infty(U) \to C^\infty(U)\,.$$

Esercizio 2. Sia $a(x, y, \xi) \in S^d(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ un simbolo come nell'enunciato del lemma di Kuranishi. Supponiamo che $d < -n - k$. Verificare che

$$K(x, y) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x-y,\xi>}a(x, y, \xi)d\xi$$

è una funzione C^k e che $Au(x) = \int K(x, y)u(y)dy$.
Suggerimento: verificare, utilizzando le stime sul simbolo, che si possono passare le derivate sotto il segno d'integrale nella definizione di K e che K è quindi ben definita come funzione C^k; applicare Fubini per l'espressione di Au.

Esercizio 3. Sia $a(x, y, \xi) \in S^d(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ un simbolo come nell'enunciato del lemma di Kuranishi. Abbiamo visto che se $a(x, y, \xi)$ è identicamente uguale a zero in un intorno della diagonale in $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y$ allora l'operatore

$$Au(x) = \int\int e^{i<x-y,\xi>}a(x, y, \xi)u(y)dyd\xi$$

è un operatore in $\Psi^{-\infty}$ e quindi $Au(x) = \int K(x, y)u(y)dy$ con $K \in C^\infty$. Dimostrate questo fatto direttamente, utilizzando l'identità

$$\Delta_\xi e^{i<x-y,\xi>} = |x - y|^2 e^{i<x-y,\xi>} \text{ con } \Delta_\xi := \sum_j D^2_{\xi_j}\,,$$

e l'integrazione per parti nell'integrale che definisce A. Più in dettaglio: cominciate a supporre che $d < -n$ e dimostrate l'asserto in questo caso particolare. Poi scrivete $a(x,y,\xi) = (1+|\xi|^2)^\ell (a(x,y,\xi)(1+|\xi|^2)^{-\ell})$ con ℓ scelto opportunamente ed utilizzate l'identità $(1+\Delta_\zeta)^\ell e^{-i<z,\zeta>} = (1+|z|^2)^\ell e^{-i<z,\zeta>}$, che è del tutto analoga alla precedente, per ricondurvi al caso $d < -n$

Esercizio 4. Sia M una varietà differenziabile e sia $A \in \Psi^m(M)$. Sia $x \in \mathcal{O} \subset M$ con $\kappa : \mathcal{O} \to U$ una carta locale; abbiamo definito il simbolo principale di A calcolato in $\sum \xi^j d\chi_j(x) \in T^*M|_{\mathcal{O}}$ come il simbolo pricipale di A_U [1] calcolato in $(\chi(x),\xi) \in T^*U$. Verificare che il simbolo principale di A è globalmente definito.

Esercizio 5. Siano E,F due fibrati vettoriali su M. Sia

$$P \ : \ C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$$

un operatore differenziale di ordine k: $P \in \mathrm{Diff}^k(M;E,F)$. Abbiamo dato in classe la definizione di simbolo principale

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(P) \in C^\infty(T^*M, \mathrm{Hom}(\pi^*E, \pi^*F)) \ :$$

se $\xi \in T^*_x M$ ed $e_x \in E_x$; introduciamo $f \in C^\infty(M)$ ed $e \in C^\infty(M,E)$ tali che $df|_x = \xi$ e $e(x) = e_x$ e definiamo $\sigma_{\mathrm{pr}}(P)(\xi) \in Hom(E_x,F_x)$ come segue :

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(P)(x,\xi)(e_x) = i^k \frac{1}{k!} P((f-f(x))^k e)(x)$$

Verificare che $\sigma_{\mathrm{pr}}(P)(\xi)$ non dipende dalle scelte fatte e che è una applicazione lineare da E_x in F_x.
Verificare che se M è uguale ad un aperto U di $\mathbb{R}^n$ e se E ed F sono i fibrati prodotto su U allora questa nozione si riduce alla usuale nozione di simbolo principale per una matrice (P_{ij}) di operatori differenziali: se

$$(P_{ij}) = \left(\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(ij) \left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \right)$$

allora

$$\sigma_{\mathrm{pr}}((P_{ij}))(x,\xi) = \left(\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(ij)(\xi^1)^{\alpha_1}\dots(\xi^n)^{\alpha_n} \right).$$

Esercizio 6. Sia U un aperto di $\mathbb{R}^n$, siano $\alpha(1),\dots\alpha(\ell)$ multiindici e siano $a_{\alpha(j)}(x) \in C^\infty_c(U)$, $j=1,\dots,\ell$.
Consideriamo l'operatore $P := \sum_j a_{\alpha(j)} R_{\alpha(j)}$ con

$$(R_{\alpha(j)}u)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} (\frac{\xi}{|\xi|})^{\alpha(j)} \hat{u}(\xi) d\xi$$

[1] l'operatore associato ad A nella carta $\kappa : \mathcal{O} \to U$

dove

$$(\xi/|\xi|)^\beta = \frac{(\xi_1^{\beta_1}\cdots\xi_n^{\beta_n})}{|\xi|^{|\beta|}}\,.$$

Verificare che $P = A + K$ con $A \in \Psi^*(U)$ e $K \in \Psi^{-\infty}$. Determinare l'ordine di A.
Suggerimento: considerare una funzione $C^\infty[0,\infty)$, $\chi(t)$, uguale a zero per t piccolo e uguale ad uno per t grande; considerare poi $p_j(x,\xi) := \chi(|\xi|)(\frac{\xi}{|\xi|})^{\alpha(j)}$...