

**Corso di Laurea Magistrale a.a. 2011-12**  
*Geometria Superiore*  
**Compito a casa del 4/05/2012 (sesto compito)**

**Esercizio 1.** Dimostrare le seguenti elementari proprietà dei fasci:

1. Sia  $M$  una varietà differenziabile e  $\mathcal{C}^\infty(M)$  il fascio dei germi delle funzioni  $\mathcal{C}^\infty$ . Verificare che esiste una biezione naturale fra  $\Gamma(U, \mathcal{C}^\infty(M))$  e  $\mathcal{C}^\infty(U)$  con  $U$  un aperto di  $M$ .
2. Se  $\mathcal{S}$  è un fascio su uno spazio topologico  $M$  e  $s \in \Gamma(U, \mathcal{S})$  allora  $s$  è un'applicazione aperta ed un omeomorfismo da  $U$  a  $\mathcal{U} := \{s(p), p \in U\}$ .
3. il fascio quoziente, come definito a lezione, è effettivamente un fascio.

**Esercizio 2.** Verificare che la successione lunga associata ad una successione esatta corta di complessi di cocatene è esatta.

**Esercizio 3.** Utilizzando la successione di Mayer-Vietoris, calcolare la coomologia di de Rham di  $S^n$ .

*Suggerimento:* potete ad esempio procedere per induzione su  $n$ .

**Esercizio 4.** Utilizzando la successione di Mayer-Vietoris, calcolare la coomologia di de Rham di  $\mathbb{C}P^n$ .

*Suggerimenti:* identifichiamo  $\mathbb{C}P^{n-1}$  con il sottoinsieme di  $\mathbb{C}P^n$  definito dall'equazione  $z_n = 0$ . Consideriamo  $U = \mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^{n-1}$  e  $V$  uguale al complementare di  $[0, 0, \dots, 0, 1]$ . Verificare che  $U$  è diffeomorfo a  $\mathbb{C}^n$ ,  $U \cap V$  è diffeomorfo a  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  e che  $V$  ha la stessa coomologia di  $\mathbb{C}P^{n-1}$ . Applicare a questo punto Mayer-Vietoris...