Corso di Laurea Magistrale a.a. 2011-12

Geometria Superiore

Compito a casa del 13/04/2012 (quinto compito)

Esercizio 1. Abbiamo visto in classe che

$$\int_{\mathbb{C}P^1} c_1(T^{1,0}\mathbb{C}P^1) = 2 \tag{1}$$

come applicazione del teorema di Gauss-Bonnet in dimensione 2. Abbiamo anche visto che da (1) segue $\int_{\mathbb{C}P^1} e(T\mathbb{C}P^1) = 2$. Quindi:

$$\int_{\mathbb{C}P^1} c_1(T^{1,0}\mathbb{C}P^1) = 2 = \int_{\mathbb{C}P^1} e(T\mathbb{C}P^1). \tag{2}$$

Ritrovare questo risultato calcolando esplicitamente la classe di Eulero di S^2 ed il suo integrale su S^2.

Esercizio 2. Consideriamo nuovamente $\mathbb{C}P^1$. Definire una metrica hermitiana h su $\mathbb{C}P^1$ in modo tale che h sia data da $1/((1+|z|^2))^2$ nella carta $U = \{[z_0, z_1] \,|\, z_0 \neq 0\}$ con coordinata $z = z_1/z_0$. Scrivere la curvatura associata alla connessione complessa hermitiana e dimostrare direttamente che vale la (2).

Esercizio 3. Sia L il fibrato tautologico su $\mathbb{C}P^1$. Dimostrare che sussiste il seguente isomorfismo: $T^{1,0}\mathbb{C}P^1 = L^* \otimes L^*$. (Suggerimento: considerare le funzioni di transizione.) Utilizzare questo isomorfismo per dimostrare ancora una volta che $\int_{\mathbb{C}P^1} c_1(T^{1,0}\mathbb{C}P^1) = 2$

Esercizio 4. Consideriamo il fibrato universale su $\mathbb{C}P^n$, che denotiamo brevemente con L. L è un fibrato in rette olomorfo. Denotiamo come al solito con $U_\alpha = \{[z_0, \dots, z_n] \,|\, z_\alpha \neq 0\}$ le carte (complesse) di $\mathbb{C}P^n$, con coordinate $(\zeta_0^\alpha, \dots, \widehat{\alpha}, \dots, \zeta_n^\alpha)$, $\zeta_j^\alpha = z_j/z_\alpha$.

I. Ispirandovi al caso di $\mathbb{C}P^1$, svolto in classe, definite una base locale olomorfa per ogni $L|_{U_\alpha}$, $s^\alpha : U_\alpha \to L|_{U_\alpha}$ $\forall \alpha = 0, \dots, n$, ponendo $s^\alpha[z_0, \dots, z_n] = ([z_0, \dots, z_n], (\zeta_1^\alpha, \dots, 1, \dots, \zeta_n^\alpha))$. Verificare che queste basi locali sono compatibili nelle intersezioni, e cioè $s^\alpha = g_{\alpha\beta} s^\beta$.

II. L, che è un sottofibrato del fibrato prodotto $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}$, eredita una metrica hermitiana e quindi una connessione hermitiana complessa ∇^L. Scrivere l'espressione esplicita della 2-forma $c_1(L, \nabla^L)|_{U_\alpha}$ nelle coordinate $(\zeta_0^\alpha, \dots, \widehat{\alpha}, \dots, \zeta_n^\alpha)$.

III. Consideriamo la sottovarietà S di $\mathbb{C}P^n$ definita da $S := \{[z_0, \dots, z_n] \,|\, z_2 = z_3 = \dots = z_n = 0\}$. S non è altro che l'immagine di $\mathbb{C}P^1$ tramite l'inclusione naturale $\mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$. Dimostrare che $\int_S c_1(L, \nabla^L) \neq 0$. (Suggerimento: considerare $S \cap U_0$).

Esercizio 5. Consideriamo ora il fibrato cotangente olomorfo di $\mathbb{C}P^n$, $(T^{1,0}\mathbb{C}P^n)^*$, che denotiamo come al solito con $\Lambda^{1,0}(\mathbb{C}P^n)$. Consideriamo il fibrato universale L, un fibrato in rette olomorfo, e $L^{\oplus^{n+1}}$, un fibrato olomorfo di rango $n+1$. Scopo di questo esercizio è quello di fornire una dimostrazione del fatto che esiste una successione esatta corta di fibrati olomorfi

$$0 \to \Lambda^{1,0}\mathbb{C}P^n \to L^{\oplus^{n+1}} \to \mathbf{1} \to 0$$

dove $\mathbf{1}$ denota il fibrato banale complesso di rango 1. [1] (Questa successione esatta corta è detta la *successione di Eulero.*)

I. Come nell'esercizio precedente consideriamo U_α con coordinate $(\zeta_0^\alpha, \ldots, \widehat{\alpha}, \ldots, \zeta_n^\alpha)$. Consideriamo le $(1,0)$ forme $d\zeta_i^\alpha$ che sappiamo costituire una base locale. In $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ calcolare $d\zeta_i^\alpha$ in funzione di $\{d\zeta_j^\beta\}$.

II. Considerare la base locale s^α definita su $L|_{U_\alpha}$ come nell'esercizio precedente. Otteniamo una base locale $(s_0^\alpha, \ldots, s_n^\alpha)$ di $(L|_{U_\alpha})^{\oplus^{n+1}}$. Definiamo

$$\Phi_{U_\alpha} : \Lambda^{1,0}(\mathbb{C}P^n)|_{U_\alpha} \to (L|_{U_\alpha})^{\oplus^{n+1}}$$

come segue: $d\zeta_i^\alpha \to s_i^\alpha - \zeta_i^\alpha s_\alpha^\alpha$. Verificare che le Φ_{U_α} definiscono un morfismo $\Phi : \Lambda^{1,0}(\mathbb{C}P^n) \to L^{\oplus^{n+1}}$ (quindi globalmente definito) che è olomorfo ed iniettivo.

III. Consideriamo il fibrato quoziente $Q := L^{\oplus^{n+1}} / \operatorname{Im}(\Phi)$, un fibrato di rango 1. Sia $\pi : L^{\oplus^{n+1}} \to Q$ la mappa quoziente. Verificare che $\pi s_\alpha^\alpha = \pi s_\beta^\beta$ in $U_\alpha \cap U_\beta$ e che esiste quindi una sezione globale non nulla di Q. Q è quindi un fibrato banale di rango 1.

Esercizio 6. Utilizzando l'esercizio precedente verificare che esiste un isomorfismo di fibrati complessi:

$$T^{1,0}\mathbb{C}P^n \oplus \mathbf{1} \simeq (L^*)^{\oplus^{n+1}}.$$

Calcolare $c(T^{1,0}\mathbb{C}P^n)$, la classe totale di Chern del fibrato tangente olomorfo di $\mathbb{C}P^n$, in funzione di $c_1(L)$.

[1] Una successione esatta di fibrati $\cdots \to V^j \xrightarrow{\Phi^j} V^{j+1} \to \ldots$ su uno spazio topologico M è una successione di fibrati ed omomorfismi di fibrati che è esatta su ogni fibra, tale cioè che $\forall m \in M$, $\operatorname{Im} \Phi_m^j = \operatorname{Ker}\Phi_m^{j+1}$.