Corso di Laurea Magistrale a.a. 2011-12

Geometria Superiore

Compito a casa del 06/04/2012 (quarto compito)

Esercizio 1. Sia E un fibrato reale (rispettiv. complesso) di rango k su M, varietà differenziabile. Verificare in dettaglio che esiste sempre una metrica riemanniana (rispett. metrica hermitiana) su E. Verificare che se esiste una metrica riemanniana (hermitiana) allora le funzioni di transizione possono essere prese a valori in $O(k)$ (risp. $U(k)$). (Si dice allora che il gruppo di struttura di E può essere ridotto a $O(k)$ (risp. $U(k)$). Verificare in dettaglio che possiamo sempre scegliere una connessione compatibile con la metrica.

Esercizio 2. Sia $M = S^2$ con la metrica standard indotta da $\mathbb{R}^3$ e sia ∇ la connessione di Levi-Civita su TS^2. Calcolare la 1-forma di connessione di ∇ sull'aperto U di S^2 per il quale le coordinate sferiche sono una carta locale. Stesso esercizio per la curvatura.

Esercizio 3. Sia $M = S^2$ e sia $\widetilde{\nabla}$ la connessione su TS^2 ottenuta dalla connessione banale su $S^2\times\mathbb{R}^3$ per proiezione ortogonale dalla decomposizione $TS^2 \oplus N = S^2 \times \mathbb{R}^3 = T(\mathbb{R}^3)|_{S^2}$, con N il fibrato normale (che è banale). Calcolare la 1-forma di connessione di $\widetilde{\nabla}$ sull'aperto U di S^2 per il quale le coordinate sferiche sono una carta locale. Stesso esercizio per la curvatura.

Esercizio 4. Consideriamo la sfera S^2 con la metrica indotta. Consideriamo i punti

$$P = (1, 0, 0)\,, \quad Q = (0, 1, 0)\,, \quad R = (0, 0, 1)$$

Sia γ_{PQ} la porzione di equatore congiungente P e Q. Siano γ_{PR} e γ_{QR} le porzioni di meridiani congiungenti P ed R, e Q ed R.

1. Parametrizzare queste 3 curve (banale).

2. Sia $\underline{v} = (0, \alpha, \beta) \in T_{(1,0,0)}S^2$. Sia ∇ la connessione di Levi-Civita. Trasportiamo per parallelismo $\underline{v}$ lungo queste 3 curve nell'ordine $\gamma_{PQ} \to \gamma_{QR} \to \gamma_{RP}$ (notare che la composizione delle tre curve è un laccio puntato in P). Calcolare il vettore $\underline{w} \in T_{(1,0,0)}S^2$ ottenuto alla fine di questi 3 trasporti paralleli.

Esercizio 5. Sia M una varietà differenziabile orientabile di dimensione 4ℓ. Fissiamo indici $i_1, \ldots, i_k$ tali che $i_1 + \cdots + i_k = \ell$ e definiamo il numero di Pontrjagin associato a $i_1, \ldots, i_k$ come

$$\int_M p_{i_1}(M) \wedge \cdots \wedge p_{i_k}(M)$$

Supponiamo ora che M sia il bordo di una varietà orientabile di dimensione $4\ell + 1$: $M = \partial W$. Dimostrare che allora tutti i numeri di Pontrjagin sono nulli.

(Suggerimenti: (i) utilizzando la normale al bordo si ha $TW|_{\partial W} \equiv TW|_M = TM \oplus 1$, dove abbiamo denotato con 1 un fibrato banale di rango 1. (ii) Utilizzare il teorema di Stokes.)