Corso di Laurea Magistrale a.a. 2011-12

Geometria Superiore

Compito a casa del 30/3/2012 (terzo compito)

Esercizio 1. Risolvere i seguenti esercizi nel libro di Frank Warner *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*:
Esercizi dal numero 12 al numero 18 incluso, Cap 4 pag 159 e 160. Per il 16, solo (a), (b), (c). Gli esercizi sono disponibili sulla mia pagina web.
(L'integrale di una 1-forma $\alpha \in \Omega^1(M)$ lungo una curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ è per definizione il numero $\int_I \gamma^*\alpha$.)

Esercizio 2. Sia $L := E_1(\mathbb{C}^{n+1})$ il fibrato universale su $\mathbb{C}P^n$. Sabbiamo che L è un fibrato complesso di rango 1 e olomorfo. Consideriamo in particolare $\mathbb{C}P^1$. Descrivere le funzioni di transizione di L^k, $k \in \mathbb{N}$ (con L^k uguale al prodotto tensoriale di L con se stesso k volte). Descrivere le funzioni di transizione di $(L^*)^k$. Poniamo $L^{-k} = (L^*)^k$.
Vero o falso : $\ell \neq k \Rightarrow$ L^ℓ *e* L^k *non sono isomorfi.*

Esercizio 3. Sia M una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^N$. Sul fibrato banale $T\mathbb{R}^N|_M = M \times \mathbb{R}^N$ c'è la connessione banale d. Sia poi $p : T\mathbb{R}^N|_M \to TM$ la proiezione canonica sul primo addendo della decomposizione in somma diretta $T\mathbb{R}^N|_M = TM \oplus N$, dove N è il fibrato normale ad M, cioè il fibrato ortogonale a $TM \subseteq M \times \mathbb{R}^N$ rispetto alla metrica canonica. Verificare che la posizione

$$\nabla_X Y := p(dY(X)), \qquad X, Y \in C^\infty(M, TM),$$

definisce una connessione su TM.

Esercizio 4. Sia $M = G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ la grassmanniana dei k-sottospazi in $\mathbb{R}^{n+k}$, e sia $E_{k,n+k}(\mathbb{R})$ il fibrato universale su M. Rispetto alla metrica canonica sul fibrato banale $M \times \mathbb{R}^{n+k}$ vale allora la decomposizione in somma diretta

$$M \times \mathbb{R}^{n+k} = E_{k,n+k}(\mathbb{R}) \oplus E_{k,n+k}(\mathbb{R})^\perp,$$

e sia p la proiezione sul primo addendo. Verificare che si ottiene una connessione su $E_{k,n+k}(\mathbb{R})$ ponendo

$$\nabla_X s := p(ds(X)), \quad s \in C^\infty(M, E_{k,n+k}(\mathbb{R})), X \in C^\infty(M, TM).$$

Esercizio 5. Sia M una varietà differenziabile. Consideriamo $[0,1] \times M$ e le inclusioni naturali $i_0 : M \to [0,1] \times M$, $i_0(p) = (0, p)$ e $i_1 : M \to [0,1] \times M$, $i_1(p) = (1, p)$. Sia F un fibrato su $[0,1] \times M$. Possiamo sempre dotare F di una connessione.
1. Verificare che esiste un isomorfismo di fibrati $i_0^*F \simeq i_1^*F$. (Suggerimento: utilizzare il trasporto parallelo.)
2. Dedurre che se (E, π, M) è un fibrato e $f : N \to M$ e $g : N \to M$ sono due applicazioni $\mathcal{C}^\infty$-omotope allora $f^*E \simeq g^*E$.

Esercizio 6. Sia (M, g) una varietà riemanniana. Sia $f : M \to M$ un diffeomorfismo e supponiamo che f sia un' *isometria* ($df_p : T_pM \to T_{f(p)}M$ è un'isometria lineare $\forall p$). Dato che f è un diffeomorfismo, il differenziale di f induce un'applicazione $f_* : \mathcal{C}^\infty(M, TM) \to \mathcal{C}^\infty(M, TM)$ definita come segue: se W è un campo di vettori su M allora $(f_*W)(p) := df_q(W_q)$ con $f(q) = p$.
Dimostrare, utilizzando le definizione stessa di connessione di Levi-Civita, che

$$\nabla_{f_*X} f_*Y = f_*(\nabla_X Y)\,.$$

Esercizio 7. (Richiede un minimo di conoscenze sui gruppi di Lie). Sia $G = SO(n)$. Diamo per buona l'esistenza di una metrica riemanniana bi-invariante su G. Fissiamo una tale metrica $<,>$ e sia ∇ la connessione di Levi-Civita associata. Verificare che se X ed Y sono campi vettoriali invarianti a sinistra allora

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$$

Suggerimento: verificare preliminarmente l'identità

$$< [Z, X], Y > + < X, [Y, Z] >= 0$$

per 3 campi di vettori invarianti a sinistra.