Corso di Laurea Magistrale a.a. 2011-12

Geometria Superiore

Compito a casa del 16/3/2012 (secondo compito)

Esercizio 1. Sia $E_k(\mathbb{R}^n) = \{(p, \underline{v}) \in G_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \mid \underline{v} \in p\}$ e sia $\pi : E_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$ l'applicazione $(p, \underline{v}) \to p$. Dimostrare che la terna $(E_k(\mathbb{R}^n), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$ è un fibrato vettoriale reale di rango k e C^∞.

Esercizio 2. Ripetere l'esercizio 1 nel caso complesso, dimostrando che il fibrato universale $E_k(\mathbb{C}^n)$ è un fibrato *olomorfo*.

Esercizio 3. Sia X uno spazio topologico e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento. Supponiamo che per ogni coppia $(\alpha, \beta) \in A \times A$ sia assegnata una funzione continua

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$$

e che questa collezione di mappe verifichi le seguenti proprietà:

1) $g_{\alpha\alpha}(m) = \mathrm{Id}_{k\times k}\ \forall m \in U_\alpha$

2) $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$ in $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Sia $\widehat{E}$ l'unione disgiunta dei $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$; introduciamo una relazione d'equivalenza $\mathcal{R}$ in $\widehat{E}$ come segue

$$U_\alpha \times \mathbb{R}^k \ni (x, e)\mathcal{R}(y, f) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k \Leftrightarrow x = y \text{ e } f = g_{\alpha\beta}(x)e$$

Sia E lo spazio quoziente dotato della topologia indotta e sia $\pi : E \to X$ la mappa che associa alla classe d'equivalenza di (x, e) il punto $x \in X$.
Verificare che (E, π, X) è un fibrato vettoriale (continuo) di rango k.
Verificare che se M è una varietà differenziabile e le $g_{\alpha\beta}$ sono C^∞ allora (E, π, M) può essere dotato di una struttura di fibrato reale C^∞.
Verificare che se M è una varietà complessa, le $g_{\alpha\beta}$ sono a valori in $GL(k, \mathbb{C})$ e sono, inoltre, olomorfe, allora (E, π, M) può essere dotato di una struttura di fibrato olomorfo.

Esercizio 4. Determinare le funzioni di transizione del fibrato tangente TM ad una varietà differenziabile M.

Esercizio 5. Sia (E, π_E, X) un fibrato vettoriale e sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento di aperti banalizzanti per E. Rimane allora definito il cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$ delle funzioni di transizione

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$$

Sia ora (F, π_F, X) un secondo fibrato e supponiamo che gli aperti $\{U_\alpha\}$ siano banalizzanti anche per (F, π_F, X). Sia $\{f_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})\}$ il cociclo associato a questo secondo fibrato. In generale diremo che due cocicli $\{k_{\alpha\beta}\}$ e $\{h_{\alpha\beta}\}$ sono equivalenti se $\forall\alpha$ esiste $\lambda_\alpha : U_\alpha \to GL(k, \mathbb{R})$ continuo tale che

$$k_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha h_{\alpha\beta} \lambda_\beta^{-1}.$$

Verificare che (E, π_E, X) *è isomorfo a* (F, π_F, X) *se e solo se i rispettivi cocicli sono equivalenti.*

Esercizio 6. Sia $E \to X$ un fibrato vettoriale di rango k. Verificare che è ben definito il duale di E, E^*. Determinare le funzioni di transizione di E^* a partire da quelle di E.

Esercizio 7. Siano (E, π_E, X) e (F, π_F, X) due fibrati vettoriali. Sia $\phi : E \to F$ un morfismo di fibrati e supponiamo che $\phi|_{E_x}$ sia un isomorfismo per ogni $x \in X$. Verificare che ϕ è allora un isomorfismo di fibrati (e cioè ϕ è anche un diffeomorfismo).