ALGEBRA 1 PB-Z
VIII. 11 V 2012

Esercizio 1. Siano $\mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni reali di una variabile reale e $\mathrm{I}_0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni che si annullano nel punto $0 \in \mathbb{R}$.

Si mostri che l'insieme $\mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, se dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto tra funzioni, è un anello commutativo unitario e che $\mathrm{I}_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ è un ideale bilatero di $\mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Sia $(G,\cdot)$ un gruppo.

Si mostri che un sottoinsieme $X \subseteq G$ di G è un sottogruppo di G se e solo se

$$x_1,\ x_2 \in X \ \Rightarrow\ x_1 x_2^{-1} \in X.$$

Esercizio 3. Siano $(G,\cdot)$ un gruppo e $S \leq G$ un sottogruppo di G.

I. Si mostri che le relazioni ϱ_{sn} e ϱ_{ds} definite da

$$\forall x_1, x_2 \in G \quad x_1 \varrho_{\mathrm{sn}} x_2 \Leftrightarrow x_1^{-1} x_2 \in S$$

e, rispettivamente,

$$\forall x_1, x_2 \in G \quad x_1 \varrho_{\mathrm{ds}} x_2 \Leftrightarrow x_1 x_2^{-1} \in S$$

sono di equivalenza e che le partizioni di G ad esse associate sono $\{xS\}_{x\in G}$ e, rispettivamente, $\{Sx\}_{x\in G}$.

II. Si mostri che tutte le classi laterali sinistre (destre) hanno la medesima potenza e che essa è uguale alla potenza di S considerato come insieme ([1]).

III. Dedurre il seguente teorema ([2]) ([3]).

Teorema (Lagrange). Sia G un gruppo finito. Allora l'ordine di un sottogruppo S di G è necessariamente un divisore dell'ordine di G.

Merita attenzione il fatto che il "Viceversa" in generale, non è vero.

[1] *Sugg.:* ...per ogni $x \in G$, le applicazioni $\mathrm{S}_x, \mathrm{D}_x : G \to G$ definite da $y \mapsto \mathrm{S}_x(y) = xy$ e, rispettivamente, $y \mapsto \mathrm{D}_x(y) = yx$ sono biunivoche...

[2] *Def.:* L'**ordine** di un gruppo $(G,\cdot)$ è la cardinalità di G considerato come insieme. Abitualmente l'ordine G è denotato $|G|$.

[3] *Sugg.:* Si scriva $|G| = |S| \cdot |G/\varrho_{\mathrm{sn}}|$ e $|G| = |S| \cdot |G/\varrho_{\mathrm{ds}}|$

Esercizio 4. Siano $(G, \cdot)$ un gruppo ciclico e $g \in G$ un generatore di G ([4]).

Si mostri che ogni sottogruppo $S \leq G$ è ciclico.

Esercizio 5. Siano $(G, \cdot)$ un gruppo ciclico finito, $g \in G$ un generatore di G e $n = |G|$ l'ordine di G.

I. Si mostri che, per ogni $s \in \{1, ..., n\}$, l'ordine di g^s è uguale a $n/(n, s)$, che $\langle g^s \rangle = \langle g^{(n,s)} \rangle$ e che l'elemento $g^s \in G$ genera G se e solo se $(n, s) = 1$ ([5]).

II. Si mostri per ogni $h \in \{1, ..., n\}$ tale che $h|n$ esiste uno e un solo sottogruppo di G di ordine h ([6]).

Esercizio 6. Determinare il numero di relazioni di equivalenza su $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ e stabilire quante di esse sono compatibili con l'operazione di somma ([7]), ([8]).

Esercizio 7. Si studi la riducibilità in $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$, $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ dei seguenti polinomi a coefficienti interi

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}(\mathrm{X}) &= \mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^2 + 2 \\
\mathrm{R}(\mathrm{X}) &= 3\mathrm{X}^8 + 3\mathrm{X} + 2 \\
\mathrm{P}(\mathrm{X}) &= \mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^3 + 2\mathrm{X}^2 + 5\mathrm{X} + 2 \\
\mathrm{E}(\mathrm{X}) &= \mathrm{X}^4 + \mathrm{X}^2 + 1
\end{aligned}
$$

---

[4] *Def.:* Un gruppo $(G, \cdot)$ è **ciclico** sse esiste un elemento $g \in G$ (detto **generatore** di G) tale che G è uguale all'insieme delle potenze con esponente intero di g; ossia, sse esiste $g \in G$ tale che $G = \{g^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Notazioni abituali per un gruppo ciclico G generato da $g \in G$ sono $G = \langle g \rangle$ oppure $G = (g)$.

[5] *Not.:* Dati due interi $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$, denotiamo con (a_1, a_2) l'unico massimo comun divisore positivo di a_1 e a_2. Dato un elemento $x \in G$, denotiamo con $\langle x \rangle$ il sottogruppo ciclico di G generato da x.

[6] *Sugg.:* Si consideri il sottogruppo $\langle g^{n/h} \rangle$ ...

[7] *Sugg.:* Si mostri che $\mathbb{Z}_4$ è ciclico

[8] *Sempl.:* Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si denoti con eq_n la cardinalità dell'insieme delle relazioni di equivalenza definite su un insieme di cardinalità n. Per il calcolo di può rivelarsi utile la seguente formula $\mathrm{eq}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \mathrm{eq}_k$, $\mathrm{eq}_0 = 1$.