Corso di Laurea in Matematica.
Algebra 1. a.a. 2015-16. Prof. P. Piazza
Compito a casa del 11/3/2016 (Secondo compito)

Abbiamo visto in classe che se X è un insieme allora $|\mathcal{P}(X)| > |X|$, con $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X. In particolare $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$. Vedremo Lunedi' 14 Marzo che si ha $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$ e quindi, in particolare $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$. La cardinalità di $\mathbb{R}$ è detta *cardinalità del continuo.* Risulta che $|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|$ per ogni $n \geq 1$. Negli esercizi potete utilizzare l'informazione che $|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$. Gli insiemi che seguono hanno tutti la cardinalità del numerabile oppure la cardinalità del continuo e determinare la loro cardinalità vuol dire decidere quale fra le due essi hanno.

Esercizio 1. Determinare, giustificando la risposta, la cardinalità dei seguenti insiemi:

- l'insieme $\mathbb{Z}^k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$
- A l'insieme dei numeri irrazionali ($A := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).
- $B = \{(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \,|\, x/y \in \mathbb{Q}\}$

Esercizio 2. Dimostrare che i seguenti insiemi hanno la cardinalità del numerabile.

- $B = \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N}$.
- $C = \mathbb{Q}[x]$ l'insieme dei polinomi in una variabile a coefficienti razionali.
- L'insieme dei numeri reali algebrici. Vi ricordo che $\alpha \in \mathbb{R}$ è algebrico se è radice di un polinomio a coefficienti razionali.

Suggerimento: esprimere ognuno di questi insiemi come unione numerabile di insiemi numerabili.

Esercizio 3. Sia X un insieme. Verificare che esiste un'applicazione bigettiva fra $\mathcal{P}(X)$ e $\{f : X \to \{0, 1\}\}$. L'insieme $\{f : X \to \{0, 1\}\}$ si denota con 2^X. In generale l'insieme delle applicazioni da X ad Y si denota Y^X.

Esercizio 4. Sia X un insieme finito di cardinalità uguale a n. Dimostrare che $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.
Suggerimento: utilizzare il principio d'induzione.

Esercizio 5. Verificare che $[0, 1)$ e $(0, 1)$, due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, hanno la stessa cardinalità.
Suggerimento: considerate l'insieme $A = \{1/n, n \in \mathbb{N}^+\}$. Sappiamo che esiste una biezione $\phi : A \cup \{0\} \to A$. Utilizzare ϕ per costruire una biezione $f : [0, 1) \to (0, 1)$.