Corso di Laurea in Matematica.
Algebra 1. a.a. 2015-16. Prof. P. Piazza
Compito a casa del 11/3/2016 (Secondo compito). Soluzioni.

Esercizio 1. Determinare, giustificando la risposta, la cardinalità dei seguenti insiemi:

- l'insieme $\mathbb{Z}^k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$
- A l'insieme dei numeri irrazionali ($A := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).
- $B = \{(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \,|\, x/y \in \mathbb{Q}\}$

Soluzione. $\mathbb{Z}$ è unione di due insiemi numerabili, $\mathbb{N}$ e $-\mathbb{N}$, ed è quindi numerabile. Poi per induzione ed utilizzando il teorema fondamentale del numerabile vediamo che $|\mathbb{Z}^k| = |\mathbb{N}|$, $\forall k \geq 1$.
Sappiamo che se X è infinito e Y è finito o numerabile allora $|X| = |X \cup Y|$. I numeri irrazionali, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, sono infiniti: ad esempio, le radici quadrate dei numeri primi costituiscono un insieme infinito contenuto in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Sappiamo anche che $\mathbb{Q}$ è numerabile, perché $\mathbb{Q} = \cup_n \mathbb{Q}_n$, con $\mathbb{Q}_n = \{n/m, m \in \mathbb{Z}^*\}$ ed è chiaro che $|\mathbb{Q}_n| = |\mathbb{N}|$. Quindi, per quanto appena enunciato $|(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|$; a sinistra c' è $\mathbb{R}$; quindi $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|$.
Infine, per quel che concerne l'insieme B. Sicuramente $\{(x, x), x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \subset B$, perché $x/x = 1$ e $1 \in \mathbb{Q}$; quindi $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| \leq |B|$ che ci dà $|\mathbb{R}| \leq |B|$. D'altra parte $B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e quindi $|B| \leq |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$ e da CSB otteniamo $|B| = |\mathbb{R}|$.

Esercizio 2. Dimostrare che i seguenti insiemi hanno la cardinalità del numerabile.

- $B = \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N}$.
- $C = \mathbb{Q}[x]$ l'insieme dei polinomi in una variabile a coefficienti razionali.
- L'insieme dei numeri reali algebrici. Vi ricordo che $\alpha \in \mathbb{R}$ è algebrico se è radice di un polinomio a coefficienti razionali.

Suggerimento: esprimere ognuno di questi insiemi come unione numerabile di insiemi numerabili.
Soluzione. Consideriamo $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$. Osserviamo che $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) = \cup_k \mathcal{P}_k(\mathbb{N})$, dove $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ sono i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ con cardinalità minore o uguale a k. Osserviamo anche che $\{\{n\}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ e quindi $|\mathcal{P}_k(\mathbb{N})| \geq |\mathbb{N}|$. C'è una naturale suriezione $\mathbb{N}^k \to \mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ che associa a $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ il sottoinsieme $\{a_1, \dots, a_k\}$ (notare che questo insieme ha cardinalità minore o uguale a k, perché alcuni a_j potrebbero essere uguali). Quindi $|\mathcal{P}_k(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$. Per per il teorema fondamentale del numerabile e per CSB concludiamo che $\mathcal{P}_k(\mathbb{N}) = |\mathbb{N}|$. Applicando nuovamente il teorema fondamentale del numerabile abbiamo che $|\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}|$.
Analogamente $\mathbb{Q}[x] = \cup_k \mathbb{Q}_k[x]$ dove $\mathbb{Q}_k[x]$ è l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a k. È chiaro che $|\mathbb{Q}_k[x]| = |\mathbb{N}^{k+1}| = |\mathbb{N}|$ e quindi $|\mathbb{Q}[x]| = |\mathbb{N}|$.
Infine, sia Alg l'insieme dei numeri algebrici in $\mathbb{R}$. Sia $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}[x]$ una biezione, certamente esistente dato che $|\mathbb{Q}[x]| = |\mathbb{N}|$. Poniamo $q_j := \phi(j)$.
Allora $\{q_0, q_1, \dots, q_j, \dots\}$ è una numerazione di *tutti* i polinomi razionali.Sia $\text{Alg}(j)$:= $\{\alpha \in \mathbb{R} \,:\, q_j(\alpha) = 0\}$. Certamente, per definizione, $\text{Alg} = \cup_j \text{Alg}(j)$. È anche chiaro che $\text{Alg}(j)$ è un insieme finito. Ne segue che Alg è finito oppure numerabile [1] ; ma

[1] L'unione numerabile di insiemi finiti disgiunti è numerabile; ma l'unione numerabile di insiemi finiti non disgiunti puo' essere soltanto finita, ad esempio se prendo infinite copie dello stesso insieme finito

Alg non è finito perché contiene tutti i numeri razionali, che sono radici dei polinomi $x - q$, $q \in \mathbb{Q}$. Ne segue che $|\mathrm{Alg}| = |\mathbb{N}|$.

I rimanenti 3 esercizi sono tutti risolti nel Campanella (Esercizio 3 $\longrightarrow$ p. 48 (vedere **(3)**); Esercizio 4 $\longrightarrow$ Prop.6 p. 29; Esercizio 5 $\longrightarrow$ p. 48)