Corso di Laurea in Matematica.
Algebra 1. a.a. 2018-19. Proff. P. Papi e P. Piazza
Compito a casa del 18/11/2018 (settimo compito)

Esercizio 1. Sia A un anello commutativo unitario e $d \in A$ tale che $d^2 = d$. Poniamo $A_d := \{x \,|\, x \in A, \quad xd = 0_A\}$.

(1) Provare che A_d è un ideale di A.
(2) Determinare un ideale I di A ed un isomorfismo $f : A/A_d \longrightarrow I$.

Suggerimento: determinare un ideale I ed un opportuno omomorfismo suriettivo di anelli $g : A \to I$

Esercizio 2. Sia R un anello. $\forall x, y \in R$ consideriamo $[x, y] = xy - yx$, detto il commutatore di x ed y. Sia S l'insieme di tutti i commutatori e sia (S) l'ideale generato da S.
1. Verificare che $R/(S)$ è commutativo.
2. Sia I un ideale di R. Verificare che R/I è commutativo se e solo se $(S) \subset I$.

Esercizio 3. Sia $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Consideriamo l'insieme

$$I_n := \{f(x) \in \mathbb{Z}[X] \text{ tale che } n \,|\, f(3)\} \subset \mathbb{Z}[X].$$

1. Dimostrare che I_n è un'ideale di $\mathbb{Z}[X]$.
2. Determinare per quali valori di n l'ideale I_n è massimale.
Suggerimento: considerare un opportuno omomorfismo di anelli ϕ con dominio $\mathbb{Z}[X]$.

Esercizio 4. Sia R un anello commutativo con unità con la proprietà che, per ogni $x \in R$, esiste un intero $n > 1$ tale che $x^n = x$. Dimostrare che un ideale $I \subset R$ è primo se e solo se è massimale.

Esercizio 5. Siano R, R' due anelli commutativi unitari e sia $\phi : R \to R'$ un omomorfismo. Sia I' un ideale di R'. È ben noto che $\phi^{-1}(I')$ è un ideale di R.
0. Riproducete da soli la dimostrazione del fatto che $\phi^{-1}(I')$ è un ideale di R.
1. Verificare che I' primo implica $\phi^{-1}(I')$ primo.
2. Supponiamo ora che ϕ sia suriettiva. Verificare che I' massimale implica $\phi^{-1}(I')$ massimale. [1]

Per il prossimo esercizio diamo alcune definizioni (la seconda l'abbiamo già data nel contesto dei gruppi):
(i) Un ideale $H \neq A$ di un anello commutativo A si dice *primario* se per ogni coppia di elementi $(a, b) \in A \times A$ tali che $ab \in H$ e $a \notin H$ esiste un intero positivo n tale che $b^n \in H$.
(ii) un elemento $a \in A$ è *nilpotente* se esiste $n \geq 1$ tale che $a^n = 0_A$.

Esercizio 6. Se A è unitario e $H \neq A$ è un ideale di A si provi che H è primario se, e solo se, nell'anello quoziente A/H ogni divisore dello zero è nilpotente.

Esercizio 7. Nell'anello $\mathbb{Z}[X]$ si consideri l'ideale $I := (3, X)$. Dimostrare che I è massimale.
Suggerimento: studiare il quoziente.

[1] Senza l'ipotesi di suriettività non è in generale vero che I' massimale implica $\phi^{-1}(I')$ massimale.