Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Prof. P. Piazza. Esame del 16/02/2010

Esercizio 1. Sia $RA(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ un riferimento affine nello spazio con coordinate associate (x, y, z).
1.1 Si verifichi che i tre punti

$$P_1(1,2,0), \quad P_2(1,1,1), \quad P_3(2,-1,-3)$$

sono non-allineati.
1.2 Si dia un'equazione cartesiana del piano che li contiene.
1.3 Dare equazioni parametriche per la retta ortogonale a tale piano e passante per il punto Q di coordinate $(0, 0, 1)$.

Soluzione. Per verificare che i tre punti sono non-allineati basta scrivere le equazioni della retta per P_1 e P_2 e verificare che P_3 non soddisfa queste equazioni. Equivalentemente, basta calcolare i vettori direttori delle rette $P_1\,P_2$ e $P_1\,P_3$ e verificare che sono non-proporzionali.
Seguiamo, ad esempio, il primo metodo. Le equazioni parametriche della retta $P_1\,P_2$ sono

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$$

e vediamo subito che P_3 non può appartenere a questa retta dato che la sua prima coordinata è 2. Ne segue che i tre punti sono non-allineati.
Per scrivere l'equazione del piano basta utilizzare la nota formula. Si trova l'equazione:

$$6x + y + z - 8 = 0\,.$$

Le rette ortogonali a questo piano hanno parametri direttori $(6, 1, 1)$. La retta cercata ha quindi equazioni parametriche

$$(x, y, z) = (0, 0, 1) + t(6, 1, 1)\,.$$

Esercizio 2. Sia

$$A_t := \begin{vmatrix} 1 & t/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & t & 1 \end{vmatrix}\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

Sia $L_t := L_{A_t}$ l'operatore definito da A_t. Studiare la diagonalizzabilità di L_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Il polinomio caratteristico di A_t è $(2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$ che ha radici $\lambda_1 = 2$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 0$ con molteplicità algebrica 1. Per l'autovalore λ_2 sappiamo che la molteplicità algebrica è necessariamente uguale a quella geometrica. Possiamo quindi concentrarci sull'autovalore $\lambda_1 = 2$. L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 2$ è dato da $\mathrm{Ker}(A_t - 2I_3)$. Ma

$$A_t - 2I_3 = \begin{vmatrix} -1 & t/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & t & -1 \end{vmatrix}$$

La dimensione dell'autospazio V_2 è quindi uguale a $3 - r_t$ con r_t uguale al rango di questa matrice. Questa dimensione è quindi uguale a 2, che è la molteplicità algebrica dell'autovalore, se e solo se r_t è uguale a 1. Tuttavia, è semplice verificare che $r_t = 1$ se e solo se $t = 0$. Quindi, la molteplicità algebrica di ogni autovalore è uguale alla sua molteplicità geometrica se e solo se $t = 0$. La conclusione è che L_t è diagonalizzabile se e solo se $t = 0$.

Esercizio 3. Sia $RA(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ un riferimento nello spazio affine, con coordinate associate (x, y, z). Determinare equazioni parametriche e cartesiane per la retta r passante per il punto $P(1, 1, 2)$, parallela al piano π di equazione cartesiana

$$x + 2y + z = 3$$

e incidente la retta s di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

Soluzione. I piani paralleli a π sono dati dall'equazione cartesiana $x + 2y + z = k$, dove k è una costante arbitraria. Imponendo che contenga P, otteniamo che il piano per P parallelo a π ha equazione

$$x + 2y + z = 5.$$

L'intersezione di questo piano con la retta s è il punto $Q(8/3, 10/3, -13/3)$. Quindi la retta r è la retta per P e Q. Un calcolo dà le equazioni parametriche di r:

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{5}{3}u \\ y = 1 + \frac{7}{3}u \\ z = 2 - \frac{19}{3}u. \end{cases}$$

Dalle equazioni parametriche si passa a quelle cartesiane con uno dei ben noti metodi.

Esercizio 4. $\mathbb{R}^3$ con base canonica e prodotto scalare canonico. Si consideri la forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$ definita da

$$b(\underline{x}, \underline{y}) = x_1y_1 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 + 9x_3y_3.$$

Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizzi questa forma bilineare. Vero o falso: $b(\, , \,)$ è non-degenere e indefinita. Spiegare.

Soluzione. La matrice associata alla forma bilineare b nella base canonica è la matrice simmetrica

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

Consideriamo l'operatore lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da questa matrice nella base canonica: $T = L_A$. Sappiamo che questo operatore è simmetrico in $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare canonico; segue dal teorema spettrale che T è diagonalizzabile e che esiste una base ortonormale costituita da autovettori di T. Sappiamo inoltre che una base ortonormale di autovettori per T diagonalizza simultaneamente l'operatore e la forma bilineare. Troviamo quindi gli autovalori della matrice. Si ha

$$p_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(10 - \lambda).$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ di molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 10$ di molteplicità algebrica 1. L'equazione cartesiana di $V_0 = \mathrm{Ker}T$ è $x_1 - 3x_3 = 0$. Una base ortogonale di tale autospazio è data da $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ dove $\underline{v}_1 = (0, 1, 0)$ e $\underline{v}_2(3, 0, 1)$. Si vede facilmente che le equazioni di V_{10} (che è lo spazio $(Span(\underline{v}_1,\underline{v}_2))^{\perp}$) sono date da $x_2 = 0; 3x_1 + x_3 = 0$. Una base di V_{10} è data dal vettore $\underline{v}_3 = (1, 0, -3)$. Quindi $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per T. Una base ortonormale si ottiene normalizzando la base trovata. Questa è la base cercata.

È falso che $b(\, , \,)$ è indefinita e non-degenere. Di fatto, dal segno degli autovalori associati a T sappiamo che $b(\, , \,)$ è semidefinita positiva.

Esercizio 5. Sia A la matrice 2×2 data da

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

e sia $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da A.
Determinare la matrice associata all'applicazione lineare L_A con la seguente scelta di basi:

$$\text{base di partenza} = \{(0,2),(1,1)\}, \quad \text{base di arrivo} = \{(0,1),(1,2)\}.$$

Soluzione. La matrice cercata ha come prima colonna le coordinate di $L_A(0,2)$ nella base $\{(0,1),(1,2)\}$ e come seconda colonna le coordinate di $L_A(1,1)$ nella base $\{(0,1),(1,2)\}$. Si ha

$$L_A(0,2) = A \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 4 \end{vmatrix}, \quad L_A(1,1) = A \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

D'altra parte

$$(0,4) = 4(0,1) + 0(1,2)\,, \quad (2,1) = -3(0,1) + 2(1,2)$$

da cui la matrice cercata

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Soluzione alternativa. Siano $\mathcal{E}$ la base canonica, $\mathcal{B}$ la base di partenza e $\mathcal{C}$ la base di arrivo. Sappiamo che la matrice A è la matrice associata ad L_A nella base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ (come base di arrivo e come base di partenza): quindi $A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(L_A)$. Noi cerchiamo $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(L_A)$. Dalla formula magica:

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(L_A) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(L_A) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id})\,.$$

Ma

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad (M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}))^{-1} = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id})$$

Calcolando l'inversa di $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id})$ e svolgendo il prodotto righe per colonne ritroviamo la matrice

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 6. Giustificando le risposte, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(6.1). $\det(-A) = -\det A, \quad \forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$
(6.2). $\det(A+B) = \det(A) + \det(B), \quad \forall A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
(6.3). $\det(AB) = \det(BA), \quad \forall A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
(6.4). $P_A(\lambda) = P_{-A}(\lambda), \quad \forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
(6.5). Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile.

Soluzione.

(6.1) FALSO: in verità $\det(-A) = (-1)^n \det A$.

(6.2) FALSO: per esempio se

$$A := \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad B := \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

si ha che $\det A = \det B = 0$, ma $\det(A + B) = 1$. Simili controesempi possono essere costruiti per $n > 2$.

(6.3) VERO: per la formula di Binet e la commutatività del prodotto tra numeri reali

$$\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B) = (\det B) \cdot (\det A) = \det(BA).$$

(6.4) FALSO: abbiamo

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{(n-1)} \mathrm{Tr}(A) \lambda^{n-1} + \cdots$$

Siccome $\mathrm{Tr}(-A) = -\mathrm{Tr}(A)$, vediamo che $P_A(\lambda) \neq P_{-A}(\lambda)$.

(6.5) FALSO: la matrice 2×2 che rappresenta una rotazione del piano, di angolo diverso da un multiplo intero di π, non ha autovalori, e quindi non è diagonalizzabile, ma è una matrice ortogonale.