**Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.**
**Prof. P. Piazza. Esame del 01/02/2010**

**Esercizio 1.** *Spazio vettoriale metrico* $\mathbb{R}^4$*, con prodotto scalare canonico, con base canonica* $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ *fissata e coordinate associate* $(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

*(1.1) Si consideri il sottospazio* $W$ *generato da*

$$\underline{v}_1 = (0,0,0,1) \qquad \underline{v}_2 = (-1,0,1,0) \qquad \underline{v}_3 = (1,1,0,0)$$

*Verificare che* $\dim(W) = 3$. *Determinare le equazioni cartesiane di* $W^\perp$. *Determinare una base per* $W^\perp$.

*(1.2) Determinare la base ortonormale* $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3$ *di* $W$ *ottenuta applicando il metodo di Gram-Schmidt alla base* $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$.

*(1.3) Determinare un vettore* $\underline{f}_4$ *di* $W^\perp$ *in modo tale che la base* $\mathcal{F} = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3, \underline{f}_4\}$ *sia una base ortonormale di* $\mathbb{R}^4$.

**Soluzione.**

(1.1). Il sottospazio $W$ generato da

$$\underline{v}_1 = (0,0,0,1) \qquad \underline{v}_2 = (-1,0,1,0) \qquad \underline{v}_3 = (1,1,0,0)$$

ha dimensione 3 perché i 3 vettori sono linearmente indipendenti (la matrice $3 \times 4$ che ha come colonne le coordinate dei vettori ha rango 3 come subito si verifica). Equazioni cartesiane per $W^\perp := \{\underline{v} \in \mathbb{R}^4 \mid < \underline{v}, \underline{w} >= 0 \, \forall \underline{w} \in W\}$ si ottengono osservando che per la bilinearità del prodotto scalare

$$W^\perp = \{\underline{v} \in \mathbb{R}^4 :< \underline{v}, \underline{v}_i >= 0, i = 1,2,3.\}$$

Quindi dall'espressione del prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^4$ segue che :

$$\underline{v} \in W^\perp \;\Leftrightarrow \begin{cases} < \underline{v}, (0,0,0,1) >= 0 \\ < \underline{v}, (-1,0,1,0) >= 0 \\ < \underline{v}, (1,1,0,0) >= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_4 = 0 \\ -v_1 + v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 = 0 \end{cases}$$

Equazioni cartesiane per $W^\perp$ sono quindi

$$\begin{cases} x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Vi ricordo che queste equazioni non sono univocamente determinate. Un vettore generatore per $W^\perp$, che già sappiamo avere dimensione $4 - \dim W = 4 - 3 = 1$, è una soluzione di questo sistema omogeneo $3 \times 4$ di rango 3; si verifica immediatamente che il vettore $\underline{v}_4 = (1,-1,1,0)$ verifica queste equazioni ed è quindi una base di $W^\perp$.

(1.2) Per determinare la base ortonormale $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_2$ di $W$ ottenuta applicando il metodo di Gram-Schmidt alla base $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ bisogna fare qualche conto; notiamo innanzitutto che

$$< \underline{v}_1, \underline{v}_2 >= 0 \;, \quad < \underline{v}_1, \underline{v}_3 >= 0 \;, \quad < \underline{v}_2, \underline{v}_3 >= -1$$

Inoltre

$$||\underline{v}_1|| = 1 \qquad ||\underline{v}_2||^2 = 2$$

Una base *ortogonale* è data da

$$\underline{g}_1 = \underline{v}_1 \;, \quad \underline{g}_2 = \underline{v}_2 \;, \quad \underline{g}_3 = \underline{v}_3 - \frac{< \underline{v}_3, \underline{v}_2 >}{< \underline{v}_2, \underline{v}_2 >} \underline{v}_2.$$

Facendo i conti troviamo $\underline{g}_3 = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0)$. La base cercata è ottenuta *normalizzando* i vettori $\underline{g}_i$ (e cioè dividendoli per la loro lunghezza in modo da avere dei vettori *unitari*):

$$\underline{f}_1 = (0,0,0,1) \quad \underline{f}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \quad \underline{f}_3 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0)\,.$$

(1.3) $\underline{f}_4 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ è un versore di $W^\perp$. Insieme a $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3$ fornisce una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ con la proprietà richiesta dall'esercizio.

**Esercizio 2.** *Spazio vettoriale metrico $\mathbb{R}^2$, con prodotto scalare canonico. Determinare la matrice associata nella base canonica $\mathcal{E}$ all'operatore $P$ di proiezione ortogonale sulla retta $U$ di equazione cartesiana $x_1 - 2x_2 = 0$. Determinare anche la matrice associata alla simmetria ortogonale $S$ rispetto a $U^\perp$.*

**Soluzione.** Una base per la retta $U$ è data dal vettore $\underline{u} = (2,1)$. La matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(P)$ associata a $P$ nella base canonica è la matrice che ha come colonne le coppie

$$P\underline{e}_1 = \frac{< \underline{e}_1, \underline{u} >}{< \underline{u}, \underline{u} >}\underline{u}\,, \quad P\underline{e}_2 = \frac{< \underline{e}_2, \underline{u} >}{< \underline{u}, \underline{u} >}\underline{u}\,.$$

Facendo i conti si ottiene

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(P) = \begin{vmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{vmatrix}$$

La matrice associata alla simmetria ortogonale $S$ rispetto a $U^\perp$ si ottiene ricordando che $S = \mathrm{Id} - 2P$, quindi

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(S) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{vmatrix}$$

**Esercizio 3.** *Spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ con prodotto scalare geometrico. È stata fissata una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ con coordinate associate $(x, y, z)$. È stata fissata l'orientazione definita da $\mathcal{B}$. Fissiamo il vettore $\underline{w}$ di coordinate $(1, -1, 0)$ e consideriamo l'applicazione $F : \mathcal{V}_O \to \mathcal{V}_O$ definita da*

$$F(\underline{v}) = \underline{w} \wedge \underline{v}, \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_O\,.$$

*(1) Spiegare perché $F \in \mathrm{End}(\mathcal{V}_O)$.*
*(2) Determinare $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$, la matrice associata a $F$ nella base $\mathcal{B}$.*
*(3) Studiare iniettività e suriettività di $F$. Determinare equazioni cartesiane per* $\mathrm{Im}\,T$.
*(4) Facoltativo: Determinare un sottospazio vettoriale $U$ di $\mathcal{V}_O$ che abbia dimensione 2 e che sia invariante rispetto a $F$. Vi ricordo che ciò vuol dire che $F(U) \subset U$. (Suggerimento: ragionare geometricamente, utilizzando le proprietà del prodotto vettoriale ... ).*
*(5) Stabilire se $F$ è diagonalizzabile.*
*(6) Stabilire se $F$ è un'isometria.*

**Soluzione.**
(1) $F$ è lineare perché il prodotto vettoriale è bilineare.

(2) Vi ricordo la formula per il prodotto vettoriale in coordinate: se $\underline{v} = v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k}$ e $\underline{u} = u_1\underline{i} + u_2\underline{j} + u_3\underline{k}$ allora

$$\underline{v} \wedge \underline{u} = \det \begin{vmatrix} \underline{i} & v_1 & u_1 \\ \underline{j} & v_2 & u_2 \\ \underline{k} & v_3 & u_3 \end{vmatrix}$$

(a destra sviluppiamo formalmente con Laplace secondo la prima colonna). Applicando questa formula scopriamo che

$$F(\underline{i}) := \underline{w} \wedge \underline{i} = \underline{k} \quad F(\underline{j}) = \underline{k} \quad F(\underline{k}) = -\underline{i} - \underline{j}$$

e quindi

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

(3) Dalla matrice associata ad $F$ segue che $\mathrm{Im}(F)$ è il piano generato da $(0,0,1)$ e da $(-1,-1,0)$; $\mathrm{Im}(F)$ ha equazione cartesiana $x_1 - x_2 = 0$.
$\mathrm{Ker}(F)$ ha dimensione 3-2=1; dato che dalla definizione di prodotto vettoriale si ha che $\underline{w} \in \mathrm{Ker}(F)$, ne segue che $\mathrm{Ker}(F)$ è generato da $\underline{w}$. In particolare $F$ non è né iniettiva, né suriettiva.
(4) Dalla definizione stessa di prodotto vettoriale segue che il piano ortogonale a $\underline{w}$ è invariante per $F$.
(5) $F$ *non* è diagonalizzabile perché il suo polinomio caratteristico, che è $-\lambda(\lambda^2+2)$, ammette due radici complesse coniugate.
(6) $F$ *non* è un'isometria perché, ad esempio, non è iniettiva, mentre sappiamo che le isometrie lo sono necessariamente.

**Esercizio 4.** *Spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\mathcal{E}$ fissata. Sia $L_A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ l'operatore definito dalla matrice:*

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

*Stabilire se l'operatore $L_A$ è diagonalizzabile.*
**Soluzione.** L'operatore non è diagonalizzabile. Infatti, calcolando il polinomio caratteristico si ottiene il polinomio $(1-\lambda)(\lambda^2-1)$. Gli autovalori sono quindi $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica $m_a(1) = 2$ e $\lambda_2 = -1$ con molteplicità algebrica $m_a(-1) = 1$. Si verifica senza difficoltà che l'autospazio associato all'autovalore 1 è la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x^1 - x^2 = 0 \\ x^1 - x^2 + x^3 = 0 \end{cases}$$

Ne segue che $m_g(1) = 1$; dato che $m_g(1) < m_a(1)$ l'operatore non è diagonalizzabile.

**Esercizio 5.** *Sia $RC(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo con coordinate associate $(x, y, z)$. Si dia un'equazione cartesiana del piano che contiene il punto $P(1,2,3)$ ed è perpendicolare alla retta $r$ definita dalle equazioni cartesiane*

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x + y + 3z + 1 = 0. \end{cases}$$

**Soluzione.** Sia $ax + by + cz + d = 0$ l'equazione del piano cercato. Sappiamo che i coefficienti $(a, b, c)$ sono proporzionali ai parametri direttori della retta ortogonale, che è data nel testo dell'esercizio in equazioni cartesiane. I parametri direttori di $r$ sono $(4, -5, -1)$ (basta risolvere il sistema omogeneo associato) e quindi il nostro piano va cercato fra i piani del fascio improprio:

$$4x - 5y - z + d = 0\,, \quad d \in \mathbb{R}\,.$$

Imponendo il passaggio per il punto $P(1, 2, 3)$ si trova $d = 9$. L'equazione cercata è quindi

$$4x - 5y - z + 9 = 0\,.$$

**Esercizio 6.** $\mathbb{R}^2$ *con prodotto scalare canonico. Sia* $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la forma bilineare simmetrica*

$$b(\underline{x}, \underline{y}) := x_1y_1 + x_2y_2 + 5x_1y_2 + 5x_2y_1$$

*Determinare una base ortonormale* $\mathcal{B} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ *di* $\mathbb{R}^2$ *che sia diagonalizzante per* $b( \, , \, )$ [1]*. Stabilire se* $b( \, , \, )$ *è definita positiva.*

**Soluzione.** La matrice asssociata a $b( \, , \, )$ nella base canonica è la matrice simmetrica

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Sappiamo dalla teoria che una base *ortonormale* $\mathcal{B} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ di autovettori per $L_A$, certamente esistente per il teorema spettrale, fornirà una base diagonalizzante per $b( \, , \, )$. Il polinomio caratteristico di $A$ è $\lambda^2 - 2\lambda - 24$ che ha radici $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -4$. Ne segue, subito, che $b( \, , \, )$ è non-degenere e indefinita. Una base ortonormale di autovettori (e quindi una base diagonalizzante per $b( \, , \, )$) si ottiene determinando gli autospazi associati ai due autovalori, entrambi necessariamente di dimensione 1.

$$V_6 = \{\underline{x} \,|\, \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \underline{0}\}$$

$$V_{-4} = \{\underline{x} \,|\, \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \underline{0}\}$$

Quindi

$$V_6 = \mathbb{R}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\,, \quad V_{-4} = \mathbb{R}(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

I due autospazi sono automaticamente ortogonali. Una base ortonormale diagonalizzante per $b( \, , \, )$ è quindi data da

$$\underline{w}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\,, \quad \underline{w}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\,.$$

Vi faccio notare, anche se non veniva richiesto dal testo dell'esercizio, che la forma canonica di Sylvester di questa forma bilineare è

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

e che una base diagonalizzante di Sylvester è data da

$$\underline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{w}_1\,, \quad \underline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{4}}\underline{w}_2\,.$$

---

[1] tale quindi che $b(\underline{w}_i, \underline{w}_j) = 0$ se $i \neq j$