Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Prof. P. Piazza
Soluzione esonero del 28/01/09

Soluzione esercizio 1.
(i) L'applicazione $F_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ è definita da una matrice non-singolare. Ne segue che F_A è iniettiva e suriettiva. Inoltre F_A ha 5 autovalori *distinti*: ne segue che esistono 5 autovettori linearmente indipendenti, ne segue che F_A è diagonalizzabile. F_A non è un'isometria perché è palesemente una matrice che non è ortogonale (ad esempio, il determinante non è uguale a ± 1).
(ii) Il polinomio caratteristico di F_A è uguale a $P_A(\lambda) = (1-\lambda)^5$. L'operatore F_A ammette quindi il solo autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica 5. D'altra parte l'autospazio associato a tale autovalore è

$$\mathrm{Ker}(F_A - \mathrm{Id}) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \,|\, (A - I_5)\underline{x} = \underline{0}\}$$

Questo è il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ costituito dai vettori $\underline{x} \in \mathbb{R}^5$ tali che

$$\begin{cases} x_2 + \pi x_4 = 0 \\ \sqrt{2}x_3 + \pi x_5 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Ne segue che la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 1$ è uguale a 2; dato che per questo autovalore la molteplicità algebrica è diversa da quella geometrica ne segue che F_A *non* è diagonalizzabile. F_A non è un'isometria perché manda la base canonica, che è ortonormale, in una base che non è neanche ortogonale (sono i vettori colonna della matrice), mentre sappiamo che un'isometria manda basi ortonormali in basi ortonormali.

Soluzione esercizio 2.
Il piano generico per la retta s ha equazione cartesiana

$$\lambda(x + 2z - 1) + \mu(y - z + 2) = 0$$

che riscriviamo nella forma:

$$\lambda x + \mu y + (2\lambda - \mu)z + (-\lambda + 2\mu) = 0\,.$$

La direzione ortogonale a questo piano è $\mathbb{R}(\lambda, \mu, 2\lambda - \mu)$ mentre la direzione ortogonale al piano σ è $\mathbb{R}(2, 1, -3)$. Il piano cercato si ottiene determinando λ e μ in modo tale che queste due direzioni siano ortogonali; basta imporre che $< (\lambda, \mu, 2\lambda - \mu), (2, 1, -3) >= 0$; otteniamo l'equazione $\lambda - \mu = 0$ che ammette la soluzione $\lambda = 1$, $\mu = 1$ a meno di un comune fattore di proporzionalità non nullo. Il piano cercato ha quindi equazione

$$x + y + z + 1 = 0\,.$$

Esercizio 3. Osserviamo preliminarmente che la retta $x_1 - 2x_2 = 0$ è generata dal vettore $\underline{f}_1 = (2, 1)$ e che la retta $x_1 + x_2 = 0$ è generata dal vettore $\underline{f}_2 = (1, -1)$. Per definizione

$$F\underline{f}_1 = -\underline{f}_1 \qquad F\underline{f}_2 = 3\underline{f}_2\,.$$

Notare che $\underline{f} = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.
(3.1). F è univocamente determinato perché F è lineare e perché sono dati i suoi valori su una base.

(3.2)+(3.3). Ricordiamo la formula magica
$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(F) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}) \cdot M^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}}(F) \cdot M^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}) \cdot M^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}}(F) \cdot (M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}))^{-1}$$
Nel nostro caso:
$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}}(F) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
L'inversa di $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id})$ è data da
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix};$$
calcolando il prodotto nella formula magica si ottiene infine la matrice cercata
$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(F) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$
Questa matrice è ovviamente simile ad una matrice diagonale (basta leggere come è stata ottenuta).

Esercizio 4. La retta s è descritta dai punti $\{P(t) = (-2t+1, t-2, t)\}$, $t \in \mathbb{R}$. I punti cercati devono soddisfare l'equazione
$$\sqrt{((-2t+1)-0)^2 + ((t-2)-0)^2 + (t-0)^2} = \sqrt{3}.$$
Elevando al quadrato e risolvendo l'equazione di secondo grado che ne risulta otteniamo i due valori di t, $t_1 = 1$, $t_2 = 1/3$. I due punti sono quindi $P(1)$ e $P(1/3)$ e cioè $(-1,-1,1)$, $(1/3,-5/3,1/3)$.

Esercizio 5. Una base ortonormale di α è data da
$$\underline{f}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}), \qquad \underline{f}_2 = (0,1,0).$$
La matrice associata alla proiezione ortogonale su α si ottiene calcolando le coordianate dei trasformati della base; utilizzando il noto procedimento si ha
$$P\underline{e}_1 = < \underline{e}_1, \underline{f}_1 > \underline{f}_1 + < \underline{e}_1, \underline{f}_2 > \underline{f}_2 = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2});$$
analogamente
$$P\underline{e}_2 = (0,1,0), \qquad P\underline{e}_3 = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}).$$
Ne segue che
$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(P) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
P_α è diagonalizzabile, come lo è ogni proiezione: basta prendere come base di autovettori la base costituita dai vettori $\underline{f}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\underline{f}_2 = (0,1,0)$ associati all'autovalore $\lambda = 1$ e $\underline{f}_3 \in (\alpha)^\perp$, associato a $\lambda = 0$.