Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Prof. P. Piazza. Esonero del 28/01/2010

Esercizio 1.
(i) Sia $F_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ l'applicazione lineare definita dalla matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 4 & \pi & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{2} & -1 & \pi^2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 2 & e \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

(1.1) Determinare la dimensione dell'immagine di F_A. Dire se F_A è iniettiva.
(1.2) Stabilire se F_A è diagonalizzabile.
(1.3) Stabilire se F_A è un'isometria da $(\mathbb{R}^5, <\,,\,>)$ a $(\mathbb{R}^5, <\,,\,>)$ con $<\,,\,>$ uguale al prodotto scalare canonico

(ii) Sia ora $F_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ definita dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \pi & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 & \pi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se F_A è diagonalizzabile. Stabilire se F_A è un'isometria.

Esercizio 2. Spazio euclideo. Riferimento cartesiano ortonormale $O\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{k}$ con coordinate associate (x, y, z). Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta s di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

ed ortogonale al piano σ di equazione cartesiana $2x + y - 3z + 15 = 0$.
Vi ricordo che due piani vettoriali σ e π sono ortogonali se per le rette $\sigma^\perp$ e $\pi^\perp$ si ha $\sigma^\perp \perp \pi^\perp$.

Esercizio 3. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ con base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ fissata e coordinate associate (x_1, x_2). Sia $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ l'operatore che ammette la retta di equazione cartesiana $x_1 - 2x_2 = 0$ come autospazio associato all'autovalore $\lambda_1 = -1$ e la retta di equazione cartesiana $x_1 + x_2 = 0$ come autospazio associato all'autovalore $\lambda_2 = 3$.
(3.1) Spiegare perché F è univocamente determinato dalle condizione date.
(3.2) Determinare la matrice associata ad F nella base canonica.
(3.3) Dire se la matrice di cui in (3.2) è simile ad una *matrice diagonale*.

Esercizio 4. Spazio euclideo come nell'esercizio 2. Si consideri nuovamente la retta s dell'es. 2, quindi di equazioni cartesiane $x + 2z - 1 = 0 = y - z + 2$. Determinare i punti di s che distano $\sqrt{3}$ dall'origine.

Esercizio 5. Spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^3, <\,,\,>)$ con prodotto scalare canonico $<\,,\,>$, base canonica $\mathcal{E}$ fissata e coordinate associate (x_1, x_2, x_3). Sia α il piano di equazione cartesiana $x_1 + x_3 = 0$.
Determinare la matrice associata nella base canonica $\mathcal{E}$ all'operatore P_α di proiezione ortogonale su α. Stabilire se P_α è diagonalizzabile ed in caso affermativo determinare una base di autovettori.