Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Prof. P. Piazza
Soluzione compito a casa del 08/01/10

Soluzione esercizio 1. Sia S un sottoinsieme di V e consideriamo $S^\perp := \{\underline{v} \in V$ tali che $<\underline{v}, \underline{s}>= 0\ \forall \underline{s} \in S\}$. Se $\underline{v}, \underline{w} \in S^\perp$ allora per definizione

$$<\underline{v}, \underline{s}>= 0\,,\ \ <\underline{w}, \underline{s}>= 0\,,\ \forall \underline{s} \in S$$

Ma allora per la bilinearità del prodotto scalare abbiamo

$$<\underline{v}+\underline{w}, \underline{s}>=<\underline{v}, \underline{s}>+<\underline{w}, \underline{s}>= 0+0 = 0\,,\ \forall \underline{s} \in S$$

Quindi $\underline{v}+\underline{w} \in S^\perp$ che è allora chiuso rispetto alla somma; analogamente si verifica che è chiuso rispetto alla moltiplicazione scalare. Ne segue che $S^\perp$ è un sottospazio.

Soluzione esercizio 2. È ovvio che

$$U^\perp. \subset \{\underline{v} \in V \text{ tali che } <\underline{v}, \underline{u}_j>= 0\ \forall j = 1, \dots, r\}$$

Basta verificare che vale l'inclusione opposta. Sia $\underline{v} \in \{\underline{v} \in V$ tali che $<\underline{v}, \underline{u}_j>= 0\ \forall j = 1, \dots, r\}$ e sia $\underline{u}$ un qualsiasi vettore di U. Allora $\underline{u} = \alpha_1\underline{u}_1 + \cdots + \alpha_r\underline{u}_r$ e quindi

$$<\underline{v}, \underline{u}>=<\underline{v}, \alpha_1\underline{u}_1 + \cdots + \alpha_r\underline{u}_r>= \alpha_1 <\underline{v}, \underline{u}_1> + \cdots + \alpha_r <\underline{v}, \underline{u}_r>= 0$$

Quindi $\underline{v} \in U^\perp$.

Soluzione esercizio 3. È immediata dalle proprietà del prodotto righe per colonne.

Soluzione esercizio 4. Una base per il sottospazio U di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

è ad esempio $\underline{u}_1 = (1, 0, -1, 0)$, $\underline{u}_2 = (0, 1, 0, -1)$ che è anche ortogonale, come subito si verifica. Basta quindi normalizzare, cioè dividere per le rispettive lunghezze, per ottenere una base ortonormale di U. Se avessimo fissato una base di U non-ortogonale, ad esempio $\underline{v}_1 = (1, 1, -1, -1)$, $\underline{v}_2 = (0, -1, 0, 1)$ avremmo dovuto ortoganizzarla, considerando quindi la coppia $\underline{v}'_1$ $\underline{v}'_2$ data da

$$\underline{v}'_1 = \underline{v}_1\,,\ \ \underline{v}'_2 = \underline{v}_2 - \frac{<\underline{v}_2, \underline{v}'_1>}{<\underline{v}'_1, \underline{v}'_1>}\underline{v}'_1$$

che è uguale a

$$\underline{v}'_1 = (1, 1, -1, -1)\,,\quad \underline{v}'_2 = (0, -1, 0, 1) - \frac{(-2)}{4}(1, 1, -1, -1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\,.$$

$\{\underline{v}'_1, \underline{v}'_2\}$ è una base ortogonale; considerando

$$\{\frac{1}{\|\underline{v}'_1\|}\underline{v}'_1, \frac{1}{\|\underline{v}'_2\|}\underline{v}'_2\}$$

si ottiene una base ortonormale. Le equazioni cartesiane per $U^\perp$ sono date dall'esercizio 2; un vettore $\underline{x}$ appartiene ad $U^\perp$ sse è ortogonale sia a $\underline{u}_1 = (1, 0, -1, 0)$ che a

$\underline{u}_2 = (0, 1, 0, -1)$, quindi se e solo se

$$\begin{cases} < \underline{x}, \underline{u}_1 >= 0 \\ < \underline{x}, \underline{u}_2 >= 0 \end{cases}$$

se e solo se

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

e queste sono proprio equazioni cartesiane per $U^\perp$.

Soluzione esercizio 5. Come per l'esercizio precedente, $\sigma^\perp$ ha equazioni cartesiane che si ottengono traducendo in coordinate le due relazioni

$$\begin{cases} < \underline{x}, \underline{v}_1 >= 0 \\ < \underline{x}, \underline{v}_2 >= 0 \end{cases}$$

Lascio a voi i conti. Sappiamo che

$$\{\frac{\underline{v}_1}{||\underline{v}_1||}, \frac{\underline{v}_2}{||\underline{v}_2||}\}$$

è una base *ortonormale* di σ Poniamo $\underline{f}_j = \underline{v}_j/||\underline{v}_j||$. Sappiamo che

$$P_U(\underline{v}) =< \underline{v}, \underline{f}_1 > \underline{f}_1 + < \underline{v}, \underline{f}_2 > \underline{f}_2 \underline{v}$$

Per scrivere la matrice associata a P_U nella base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ dovete calcolare $P_U(\underline{e}_j)$, $j = 1, \ldots, 4$ utilizzando la formula precedente; i vettori ottenuti sono le colonne della matrice cercata. Con un pò di conti si ottiene:

$$\begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix}$$

Soluzione esercizio 6. L'applicazione $<\,,\,>: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definita da

$$< \underline{x}, \underline{y} >= x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

è un prodotto scalare perché si scrive come

$$< \underline{x}, \underline{y} >= \underline{y}^T A \underline{x}$$

dove i vettori sono vettori colonna ed A è la matrice simmetrica

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Il prodotto scalare è definito positivo perché

$$< \underline{x}, \underline{x} >= x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \equiv (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\,;$$

è immediato verificare che se $\underline{x}$ non è il vettore nullo, questa quantità è sempre positiva. I quattro vettori

$$\{\underline{w}_1 = (1, 0, 0, 0) \quad \underline{w}_2 = (1, 1, 0, 0) \quad \underline{w}_3 = (0, 0, 1, 0) \quad \underline{w}_4 = (0, 0, 0, 1)\}$$

sono ortonormali e costituiscono quindi una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ dotato di questo prodotto scalare.

Soluzione esercizio 7. La verifica che

$$< x_1\underline{v}_1 + \cdots + x_n\underline{v}_n\, ,\, y_1\underline{v}_1 + \cdots + y_n\underline{v}_n >= |y_1, \ldots, y_n|\, A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \underline{y}^T\, A\, \underline{x} \tag{1}$$

è immediata dalla bilinearità. La matrice associata al prodotto scalare dell'esercizio 6 nella base canonica è proprio quella che abbiamo scritto nella soluzione dell'es. 6.