Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 08/01/10

Esercizio 1. (*Ortogonale di un sottoinsieme.*)
Sia $(V, < , >)$ uno spazio vettoriale metrico e sia S un sottoinsieme di V (non necessariamente un sottospazio). Sia

$$S^{\perp} := \{\underline{v} \in V \text{ tali che } < \underline{v}, \underline{s} >= 0 \ \forall \underline{s} \in S\}$$

Verificare che S è un sottospazio.

Esercizio 2. Sia U un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale metrico $(V, < , >)$. Sia $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r\}$ una qualsiasi base di U. Verificare che

$$U^{\perp} = \{\underline{v} \in V \text{ tali che } < \underline{v}, \underline{u}_j >= 0 \ \forall j = 1, \dots, r\}.$$

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^n$ e sia A una matrice simmetrica (quindi $A = A^T$). Verificare che la formula

$$< \underline{x}, \underline{y} >:= \underline{y}^T A \underline{x}$$

definisce un prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico

$$< \underline{x}, \underline{y} >:= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

Determinare una base ortonormale del sottospazio U di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Determinare poi equazioni cartesiane per $U^{\perp}$ (potete utilizzare l'esercizio 2).

Esercizio 5. Vi ricordo che se V è uno spazio vettoriale metrico e U è un sottospazio con base ortonormale $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r\}$ allora la proiezione ortogonale su U è l'applicazione lineare $P_U : V \to V$

$$P_U(\underline{v}) =< \underline{v}, \underline{u}_1 > \underline{u}_1 + \cdots + < \underline{v}, \underline{u}_r > \underline{u}_r \,.$$

Sia $V = \mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico. È dato il piano σ generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = (1, -1, 0, 0) \qquad \underline{v}_2 = (0, 0, 1, 1)$$

- Trovare le equazioni cartesiane per $\sigma^{\perp}$.
- Sia P_σ l'operatore di proiezione ortogonale sul piano σ. Determinare la matrice associata a P_σ nella base canonica.

Esercizio 6. Si consideri in $\mathbb{R}^4$ l'applicazione $< , >: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definita da

$$< (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) >= x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2 x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

Verificare che quest'applicazione definisce un prodotto scalare definito positivo (per il prodotto scalare: potete procedere direttamente oppure ricondurvi all'esercizio 3).
Stabilire se i quattro vettori

$$\{\underline{w}_1 = (1, 0, 0, 0) \quad \underline{w}_2 = (1, 1, 0, 0) \quad \underline{w}_3 = (0, 0, 1, 0) \quad \underline{w}_4 = (0, 0, 0, 1)\}$$

costituiscono una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ dotato di questo nuovo prodotto scalare.

Esercizio 7. (*Matrice associata ad un prodotto scalare in una fissata base*).
Sia V uno spazio vettoriale reale. Sia

$$< \, , \, >: V \times V \to \mathbb{R}$$

un prodotto scalare; per definizione questo vuol dire che $< \, , \, >$ è una forma bilineare simmetrica. Sia V di dimensione n e $\mathcal{B} := \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di V. Rimane allora definita la matrice associata a $< \, , \, >$ nella base fissata; **per definizione** questa è la matrice *simmetrica*

$$A \equiv |a_{ij}| := | < \underline{v}_j, \underline{v}_i > | \equiv | < \underline{v}_i, \underline{v}_j > | \, .$$

Verificare che

$$(1) \qquad < x_1\underline{v}_1 + \cdots + x_n\underline{v}_n \, , \, y_1\underline{v}_1 + \cdots + y_n\underline{v}_n >= |y_1, \dots, y_n| \, A \left| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right| = \underline{y}^T \, A \, \underline{x}$$

Questa è, per definizione, *l'espressione del prodotto scalare nelle coordinate fissate dalla base $\mathcal{B}$.*

Determinare la matrice associata al prodotto scalare dell'esercizio 6 nella base canonica.