Corso di Laurea in Matematica.
Algebra 1. a.a. 2018-19. Proff. P. Papi e P. Piazza
Compito a casa del 31/10/2018 (quinto compito)

Esercizio 1. Sia G il gruppo affine della retta affine numerica $\mathbb{R}$: $G = \{f_{a,c}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, c \in \mathbb{R}\}$ con $f_{a,c}(x) = ax+c$ e prodotto uguale alla composizione di applicazioni. Dopo aver verificato che G è effettivamente un sottogruppo del gruppo di tutte le bigezioni di $\mathbb{R}$ e che non è commutativo, dimostrare che il sottoinsieme delle traslazioni $T = \{f_{1,c}, c \in \mathbb{R}\}$ è un sottogruppo normale e che G/T è isomorfo al gruppo $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
Suggerimento: definire un opportuno omomorfismo surgettivo $G \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ....

Esercizio 2.

(1) Determinare il gruppo degli automorfismi del gruppo ciclico $(\mathbb{Z}_n,+)$. (Suggerimento: basta determinare gli omomorfismi di $\mathbb{Z}_n$ in se stesso che sono suriettivi; osserviamo anche che un omomorfismo di $\mathbb{Z}_n$ is se stesso è determinato dall'immagine di [1]....).
(2) Determinare il gruppo degli automorfismi del gruppo di Klein.

Esercizio 3.
1. Siano a e b due elementi in $\mathbb{Z}$ e siano $a\mathbb{Z}$ e $b\mathbb{Z}$ i sottogruppi generati. Cosa ci dice il primo teorema di isomorfismo ? [1]
2. Sia $n \in \mathbb{Z}$ e sia m un divisore di n.
Cosa ci dice il secondo teorema di isomorfismo ?

Esercizio 4. Abbiamo visto che il gruppo di Klein $V_4 =: V$ è un sottogruppo normale di S_4. Sappiamo anche che $H = \{\sigma \in S_4 \,|\, \sigma(4) = 4\}$ è un sottogruppo di S_4 e che è isomorfo a S_3.
Utilizzando il primo teorema di isomorfismo verificare che $S_4/V \simeq S_3$.

Esercizio 5. Sia $G = O(n)$ e sia $X = \mathbb{R}^n$. G agisce in maniera naturale su X. Determinare le orbite di questa azione.

Esercizio 6. Sia D_4 il gruppo diedrale di ordine 8.

(1) determinare $Z(D_4)$
(2) determinare il gruppo degli automorfismi interni di D_4
(3) determinare i centralizzanti degli elementi di D_4
(4) verificare l'equazione delle classi : $|D_4| = |Z(D_4)| + \sum_{a \notin Z(D_4)} [D_4 : C(a)]$

Esercizio 7. Sia $G = S_4$.

(1) Determinare la cardinalità dei centralizzanti di S_4.
(2) Scelto per ogni classe di coniugio un rappresentante, determinare esplicitamente il suo centralizzante.
(3) Verificare l'equazione delle classi in S_4.

Esercizio 8. Sia $Q \subset GL(2, \mathbb{C})$ l'insieme costituito dalle 8 matrici

$$\pm 1 := \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pm i := \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \pm j := \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pm k := \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

[1] G.M. Piacentini Cattaneo, Sezione 5.10.

(1) verificare che Q è un sottogruppo di $GL(2,\mathbb{C})$ e scriverne la tabella moltiplicativa, determinando in particolare l'ordine di ogni suo elemento [2]
(2) determinare il reticolo dei sottogruppi di Q
(3) verificare che ogni sottogruppo di Q è normale
(4) dimostrare che Q non è isomorfo a D_4 [3]
(5) determinare i centralizzanti degli elementi di Q
(6) determinare le classi di coniugio di Q
(7) determinare $Z(Q)$ e dimostrare che il gruppo degli automorfismi interni di Q è isomorfo al gruppo di Klein.

[2] Q coincide con il gruppo moltiplicativo delle unità dei quaternioni.

[3] Si può dimostare che D_4 e Q sono gli unici gruppi non commutativi di ordine 8 (a meno di isomorfismi)