Corso di Laurea in Matematica.
Algebra 1. a.a. 2018-19. Proff. P. Papi e P. Piazza
Compito a casa del 24/10/2018 (quarto compito)

Esercizio 1. Consideriamo $\mathbb{Z}_n$. Dimostrare che i quozienti di $\mathbb{Z}_n$ sono isomorfi a $\mathbb{Z}_k$ con k divisore di n. *Suggerimento: utilizzare il (primo) teorema di isomorfismo....*

Esercizio 2. Descrivere tutti gli omomorfismi di S_3 in $\mathbb{Z}_6$ e di $\mathbb{Z}_6$ in S_3.

Esercizio 3. Vero o Falso:

(1) S_n ha un sottogruppo di ordine n.
(2) S_n ha un sottogruppo di ordine k per ogni $k \leq n$.
(3) S_n ha un sottogruppo di ordine $k!$ per ogni $k \leq n$.
(Suggerimento: considerare il sottoinsieme di S_n che lascia fissi $(n-k)$ elementi in $\{1, 2, \ldots, n\}$).

Sia G un gruppo. Osserviamo preliminarmente che l'insieme $\mathrm{Aut}(G)$ degli automorfismi di G, e cioè degli isomorfismi da G in G, è un gruppo rispetto alla composizione.

Esercizio 4. Sia G un gruppo ed $a \in G$. Definiamo

$$C(a) = \{g \in G \mid ga = ag\}\,, \quad Z(G) = \{g \in G \mid gg' = g'g \;\; \forall g' \in G\}\,.$$

$C(a)$ è il *centralizzante* di a in G e $Z(G)$ è il *centro* di G. Avete visto a lezione che $Z(G)$ è un sottogruppo normale di G.
1. Verificare che $C(a)$ è un sottogruppo di G e che $C(a) = G$ se e solo se $a \in Z(G)$.
2. Verificare che $Z(G) = \cap_{a \in G} C(a)$ e che $Z(G) = G$ se e solo se G è abeliano.
3. Verificare che se $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ allora $\phi(C(a)) = C(\phi(a))$
4. Determinare tutti i centralizzanti di S_3. Determinare $Z(S_3)$.

Esercizio 5. Dato $x \in G$ possiamo definire l'applicazione [1]: $\gamma_x : G \to G\,, g \to xgx^{-1}$. In formule $\gamma_x(g) := xgx^{-1}$.
1. Verificare che γ_x è un automorfismo di G.
Verificare che l'applicazione $G \to \mathrm{Aut}(G)$ che associa a $x \in G$ l'automorfismo γ_x è un omomorfismo di gruppi.
L'immagine di questo omomorfismo è, per definizione, il gruppo degli automorfismi interni di G, denotato $\mathrm{Int}(G)$.
2. Verificare che si ha un isomorfismo di gruppi fra $\mathrm{Int}(G)$ e $G/Z(G)$.

Esercizio 6. Determinare esplicitamente tutti gli automorfismi di S_3 (suggerimento: un automorfismo preserva l'ordine degli elementi).
Dimostrare che $S_3 \simeq \mathrm{Aut}(S_3)$.

Esercizio 7. (Tratto dal secondo esame a.a. 2015/2016 (Piazza-Spinelli).)
Sia G un gruppo e $H \leq G$. Si ponga

$$N_G(H) := \{x \mid x \in G,\ Hx = xH\}, \qquad C_G(H) := \{x \mid x \in G,\ hx = xh \quad \forall h \in H\}.$$

$N_G(H)$ è il normalizzante di H in G e $C_G(H)$ è il centralizzante di H in G.
Provare che

(1) $N_G(H) \leq G$;

[1] In alcuni testi trovate come definizione $\gamma_x : g \to x^{-1}gx$.

(2) $H \trianglelefteq N_G(H)$
(3) se $K \leq G$ e H è un sottogruppo normale in K allora $K \subseteq N_G(H)$
(4) H è normale in G se e solo se $H = N_G(H)$
(5) $C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$ (suggerimento (anche per (6)): realizzare $C_G(H)$ come il nucleo di un opportuno omomorfismo da $N_G(H)$ in $\mathrm{Aut}(H)$)
(6) esiste $K \leq \mathrm{Aut}(H)$ tale che $N_G(H)/C_G(H)$ è isomorfo a K.