Corso di Laurea in Matematica.
Algebra 1. a.a. 2018-19. Proff. P. Papi e P. Piazza
Compito a casa del 12/10/18.
Soluzione degli esercizi non corretti in classe.

Esercizio 1. Determinare il resto della divisione per 7 di $19^{19^{19}}$.

Soluzione.
Dobbiamo calcolare la classe resto modulo 7 di $19^{19^{19}}$. Ma 19 e 5 sono congrui modulo 7. Quindi dobbiamo calcolare $5^{19^{19}}$. Dato che $\phi(7) = 6$ vediamo che $5^6 \equiv 1(7)$. Ora, 19 è congruo a 1 modulo 6; quindi $19^{19} \equiv 1(6)$; esiste quindi N tale che $19^{19} = 1 + 6N$. Mettendo tutto insieme:

$$19^{19^{19}} \equiv 5^{19^{19}} \equiv 5^{1+6N} \equiv 5(5^6)^N \equiv 5 \bmod 7$$

.

Esercizio 2. Un elemento a in un anello $(A, +, \cdot)$ è detto *nilpotente* se $\exists n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, tale che $a^n = 0$.
(1) Sia A un anello commutativo. Verificare che la somma di due elementi nilpotenti è nilpotente.
Utilizzando l'anello delle matric1 2×2, che non è commutativo, far vedere che questo risultato è falso se lasciamo cadere l'ipotesi di commutatività di A.
(2) Determinare i nilpotenti di $\mathbb{Z}_{60}$. (Suggerimento $[x]$ è nilpotente in $\mathbb{Z}_{60}$ se e solo se x è multiplo di....).

Soluzione.
(1) Se a è nilpotente, con $a^n = 0$, e b è nilpotente, con $b^m = 0$, allora scrivendo la formula di Newton per $(a+b)^K$, che è valida perché per ipotesi A è commutativo, e scegliendo $K \geq n+m$, capiamo subito che $(a+b)^K = 0$ e quindi $a+b$ è nilpotente.
Se consideriamo invece $A = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, che non è commutativo, allora vediamo che i seguenti due elementi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sono nilpotenti ma la loro somma non lo è.
(2) $[x]$ è nilpotente in $\mathbb{Z}_{60}$ se e solo se esiste $n > 0$ tale che 60 è un divisore di x^n. Ora, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Se x è divisibile per 2, per 3 e per 5 allora il suo quadrato è divisibile per 60 e quindi $[x]^2 = 0$. Viceversa, facciamo vedere che se esiste $n > 0$ tale che x^n è divisibile per 60 allora x è divisibile per 2, 3 e 5. Dimostriamo la contrapposta: se x non è divisibile per 2, 3 e 5 allora non esiste $n > 0$ tale che 60 divida x^n. Tuttavia, ciò è chiaro dal teorema di fattorizzazione: se 2, 3 e 5 non compaiono nella fattorizzazione in primi di x allora non compaiono nella fattorizzazione in primi di una qualsiasi potenza di x.
Riassumendo: $[x]$ è nilpotente se e solo se x è un multiplo di $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Qundi l'unico nilpotente non banale di $\mathbb{Z}_{60}$ è $[30]$.
Questo esercizio era di riscaldamento per il prossimo, che dà il criterio generale.

Esercizio 3. Sia $n = p_1^{h_1} \cdot \dots \cdot p_m^{h_m}$ la fattorizzazione in primi distinti di $n \in \mathbb{N}$. Sia $a \in \mathbb{Z}$, $1 \leq a < n$. Dimostrare che $[a] \in \mathbb{Z}_n$ è nilpotente se e solo se $a = b \cdot p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$ con $1 \leq k_i \leq h_i$ per ogni i e con $b \in \mathbb{N}^*$.

Dedurne che $\mathbb{Z}_n$ contiene elementi nilpotenti se e solo se esiste j tale che $h_j > 1$.
Determinare i nilpotenti di $\mathbb{Z}_{150}$.

Soluzione. Consultate:
http://www1.mat.uniroma1.it/people/piazza/Soluzioni_foglio4.pdf
Esercizio 4.5.

Esercizio 4. Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$ il numero

$$n^{55} + 2n^{50} + 3n^{45} + 4n^3 + 5n^2 + 6n$$

è divisibile per 7.
Suggerimento: utilizzare il piccolo teorema di Fermat.

Soluzione. Se n è divisibile per 7 il risultato è banalmente vero. Supponiamo allora che $(n, 7) = 1$. Per il piccolo teorema di Fermat $n^6 \equiv 1(7)$. Ma allora:

$$n^{55} = n^{6\cdot 9+1} \equiv n(7)\,; \quad n^{50} = n^{6\cdot 8+2} \equiv n^2(7)\,; \quad n^{45} = n^{6\cdot 7+3} \equiv n^3(7)$$

da cui

$$n^{55} + 2n^{50} + 3n^{45} + 4n^3 + 5n^2 + 6n = 7n^3 + 7n^2 + 7n$$

e quindi la tesi.