Corso di Laurea in Matematica.
Algebra 1. a.a. 2018-19. Proff. P. Papi e P. Piazza
Compito a casa del 12/10/2018 (secondo compito)

Esercizio 1. Sia G un gruppo e supponiamo che $a, b \in G$ e $ab = ba$. (Spesso scrieremo ab invece di $a \cdot b$...). Dimostrare che allora $a^n b = ba^n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2. Verificare che un gruppo G è abeliano se e solo $(ab)^2 = a^2b^2$ $\forall a, b \in G$.

Esercizio 3. Sia G un gruppo e sia $\alpha \in G$ un suo fissato elemento. Definiamo un nuovo prodotto in G nel modo seguente

$$c \star d := c\alpha d\,.$$

Verificare che G con questo nuovo prodotto è anche un gruppo.

Esercizio 4. Consideriamo il gruppo commutativo $(\mathbb{Z}, +)$ e siano H e K due suoi sottogruppi.
Sappiamo che $H = a\mathbb{Z}$ e $K = b\mathbb{Z}$ per opportuni $a, b \in \mathbb{N}$. Caratterizzare $H \cap K$ e $< H \cup K >$ utilizzando il mcm ed il MCD di a e b.

Esercizio 5. Sia G un gruppo abeliano con elemento neutro e e sia $n \in \mathbb{N}^*$. Consideriamo il sottoinsieme

$$G^{(n)} = \{g \in G \mid g^n = e\}$$

Stabilire se $G^{(n)}$ è un sottogruppo di G.

Esercizio 6. Sia $S \subset GL(2, \mathbb{R})$ il sottoinsieme

$$S = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \neq (0, 0)\}$$

Stabilire se S è un sottogruppo.

Esercizio 7. Sia G un gruppo e sia $H \leq G$. Provare che per ogni $g \in G$ l'insieme $H^g := \{g^{-1}hg \mid h \in H\}$ è un sottogruppo di G.

Esercizio 8. Determinare tutti i sottogruppi di $(\mathbb{Z}_{15}, +)$. Studiare la relazione *essere sottogruppo* fra questi sottogruppi.

Esercizi di ripasso.

Esercizio 9. Determinare il resto della divisione per 7 di $19^{19^{19}}$.

Esercizio 10. Un elemento a in un anello $(A, +, \cdot)$ è detto *nilpotente* se $\exists n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, tale che $a^n = 0$.
(1) Sia A un anello commutativo. Verificare che la somma di due elementi nilpotenti è nilpotente.
Utilizzando l'anello delle matric1 2×2, che non è commutativo, far vedere che questo risultato è falso se lasciamo cadere l'ipotesi di commutatività di A.
(2) Determinare i nilpotenti di $\mathbb{Z}_{60}$. (Suggerimento $[x]$ è nilpotente in $\mathbb{Z}_{60}$ se e solo se x è multiplo di....).

Esercizio 11. Sia $n = p_1^{h_1} \cdot \dots \cdot p_m^{h_m}$ la fattorizzazione in primi distinti di $n \in \mathbb{N}$. Sia $a \in \mathbb{Z}$, $1 \leq a < n$. Dimostrare che $[a] \in \mathbb{Z}_n$ è nilpotente se e solo se $a = b \cdot p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$ con $1 \leq k_i \leq h_i$ per ogni i e con $b \in \mathbb{N}^*$.
Dedurne che $\mathbb{Z}_n$ contiene elementi nilpotenti se e solo se esiste j tale che $h_j > 1$.
Determinare i nilpotenti di $\mathbb{Z}_{150}$.

Esercizio 12. Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$ il numero

$$n^{55} + 2n^{50} + 3n^{45} + 4n^3 + 5n^2 + 6n$$

è divisibile per 7.
Suggerimento: utilizzare il piccolo teorema di Fermat.