Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Gruppo B. Prof. P. Piazza
Soluzioni compito per le vacanze

Soluzione esercizio 1. La matrice cercata ha come prima colonna le coordinate di $F_A(0,2)$ nella base $\{(0,1),(1,2)\}$ e come seconda colonna le coordinate di $F_A(1,1)$ nella base $\{(0,1),(1,2)\}$. Si ha

$$F_A(0,2) = A \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 4 \end{vmatrix}, \quad F_A(1,1) = A \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

D'altra parte

$$(0,4) = 4(0,1) + 0(1,2), \quad (2,1) = -3(0,1) + 2(1,2)$$

da cui la matrice cercata

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Soluzione alternativa. La matrice A è la matrice associata ad F_A nella base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ (come base di arrivo e come base di partenza). Se B è la matrice cercata abbiamo schematicamante

$$A \text{ associata a } \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\} \quad \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$$
$$B \text{ associata a } \{(0,2),(1,1)\}, \quad \{(0,1),(1,2)\}.$$

Sappiamo che

$$B = D^{-1}AC$$

con

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Calcolando l'inversa di D e svolgendo il prodotto righe per colonne ritroviamo la matrice

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Seconda soluzione alternativa. Possiamo anche utilizzare la notazione magica. Sia $\mathcal{P}$ la base di partenza e $\mathcal{A}$ la base di arrivo. L'esercizio ci chiede di scrivere $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{P}}(L_A)$. Sia $\mathcal{C}$ la base canonica. Noi conosciamo $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(L_A)$ (che è proprio A). Per la ormai nota formula

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{P}}(L_A) = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}) \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(L_A) \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}).$$

La matrice $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{Id})$ la conosciamo, è la matrice che ha come colonne le coordinate della base $\mathcal{A}$ nella base canonica e quindi è $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; stesso ragionamento per la matrice $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id})$ che è quindi $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$. Dato che $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}) = (M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{Id}))^{-1}$ e dato che $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(L_A) = A$, facendo i conti ritroviamo la soluzione già vista.

Soluzione esercizio 2. Sia $\mathcal{C} := \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ la nuova base. Scegliamo questi vettori in modo tale che $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ siano una base del piano assegnato W e $\underline{w}_3 \notin W$. È ovvio che i vettori $\underline{w}_1$, $\underline{w}_2$ e $\underline{w}_3$ hanno coordinate $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ nel sistema di riferimento da loro stessi definito. Se $\underline{v}$ è un vettore del piano W allora W è combinazione lineare di $\underline{w}_1$ e $\underline{w}_2$ e quindi ha coordinate $\underline{y}$ del tipo $(\alpha, \beta, 0)$. Viceversa se $\underline{v}$ ha coordinate $\underline{y}$ del tipo $(\alpha, \beta, 0)$ allora $\underline{v} \in W$ dato che

$\underline{v} = \alpha \underline{w}_1 + \beta \underline{w}_2$. Ciò dimostra che W ha equazione $y_3 = 0$ nelle coordinate associate a $\mathcal{C}$. Per determinare espicitamente i tre vettori basterà scegliere due vettori non-proporzionali in W, ad esempio $\underline{w}_1 = (1, -1, 0)$ e $\underline{w}_2 = (0, 1, -1)$ ed un terzo vettore non in W, ad esempio $\underline{w}_3 = (1, 1, 1)$.

Soluzione esercizio 3. Per verificare che i tre punti non sono allineati basta scrivere equazioni per la retta P_1P_2 e poi verificare che P_3 non soddisfa queste equazioni. Alternativamente, basta verificare che

$$\underline{OP_2} - \underline{OP_1} \notin \operatorname{Span}(\underline{OP_3} - \underline{OP_1}) .$$

Entrambe le verifiche sono immediate. L'equazione del piano per 3 punti è ben nota e si ottiene

$$4x + 2y - z - 5 = 0 .$$

Soluzione esercizio 4. I vettori direttori delle 2 rette sono 2 vettori di giacitura per il piano; abbiamo quindi un punto e due vettori di giacitura. A questo punto si procede come al solito: le equazioni cartesiane del piano sono

$$(x, y, z) = Q_0 + t\underline{v} + s\underline{w}$$

con $\underline{v}$ e $\underline{w}$ vettori direttori delle due rette date, ovvero $\underline{v} = (-3, 4, 1)$ e $\underline{w} = (1, 1, 4)$. Un'equazione cartesiana del piano cercato è dunque

$$\det \begin{vmatrix} x-1 & -3 & 1 \\ y-2 & 4 & 1 \\ z+1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

ovvero

$$15x + 13y - 7z - 48 = 0.$$

Soluzione esercizio 5. Un semplice ragionamento mostra che la retta cercata è l'intersezione del piano π e del piano per Q e s. Quest'ultimo piano si ottiene con il metodo del fascio; mettendo poi a sistema con l'equazione cartesiana di π si ottengono le equazioni della retta cercata. Esplicitamente, il facio di piani contenenti la retta s è

$$\lambda(x - 2z + 4) + \mu(2y - z) = 0, \qquad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

Imponendo il passaggio per Q otteniamo l'equazione

$$5\lambda - \mu = 0$$

e possimao prendere $(\lambda, \mu) = (1, 5)$. Ogni altra soluzione differisce da questa solo per un fattore scalare, dunque tutte le soluzioni corrispondono allo stesso piano in $\mathbb{R}^3$. L'equazione che otteniamo con la scelta $(\lambda, \mu) = (1, 5)$ è

$$x + 10y - 7z + 4 = 0$$

La retta cercata ha dunque equazioni

$$\begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ x + 10y - 7z + 4 = 0 \end{cases}$$

Soluzione esercizio 6. I parametri direttori della retta si ottengono risolvendo il sistema omogeneo

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Otteniamo, ad esempio, il vettore direttore $(1, 1, -1)$. Il fascio improprio di piani ortogonali alla direzione $(1, 1, -1)$ è dato quindi da $1 \cdot x + 1 \cdot y + (-1) \cdot z = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$; e cioè da

$$x + y - z = k\,, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Il piano cercato si ottiene imponendo il passaggio per il punto $(-1, 0, 1)$; si trova $k = -2$.
Conclusione: il piano cercato è il piano $x + y - z = 2$.

Soluzione esercizio 7. Basta applicare meccanicamente il procedimento: prima troviamo una base ortogonale, poi la normalizziamo moltiplicando ogni vettore per l'inverso della sua lunghezza.
Applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt:

$$\underline{u}_1 = \underline{w}_1 = (1, 1, 0)$$
$$\underline{u}_2 = \underline{w}_2 - \frac{\langle \underline{w}_2, \underline{u}_1 \rangle}{\langle \underline{u}_1, \underline{u}_1 \rangle} \underline{u}_1 = (0, 1, 0) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

Infine $\underline{u}_3 = \underline{w}_3$ dato che $\langle \underline{w}_3, \underline{u}_1 \rangle = 0$ e $\langle \underline{w}_3, \underline{u}_2 \rangle = 0$. La base cercata è quindi:

$$\left\{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\,, \quad (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)\,, \quad (0, 0, 1) \right\}$$

Soluzione esercizio 8. Le due rette sono complanari ed incidenti. Per vederlo basta applicare il criterio enunciato e dimostrato in *Appunti di geometria affine.* Si ha infatti

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

in quanto le ultime due colonne sono linearmente dipendenti. Questo ci dice che le due rette sono complanari. Adesso possiamo stabilire se sono parellele, incidenti o coincidenti semplicemente calcolando il rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa. Si ha

$$rg \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = rg \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = rg \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} rg \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3.$$

La matrice dei coefficienti ha rango 3; di conseguenza anche la matrice completa ha rango 3 e le due rette sono incidenti in un punto (da Rouché-Capelli segue che l'intersezione delle due rette è non vuota e ha dimensione zero). Un piano che le contiene entrambe si ottiene fissando un punto Q su una retta, ad esempio la seconda, e facendo passare per questo punto il generico piano per la prima retta. In formule: il generico piano per le prima retta è $\lambda(x+1)+\mu(z-2) = 0$. Un punto sulla seconda è : $(-5/2, 1, 1)$; quindi $\lambda = 2$ $\mu = -3$ (a meno di un fattore scalare) e si ha l'equazione $2x - 3z + 8 = 0$.

Soluzione esercizio 9. Un vettore non nullo della retta W è il vettore $\underline{v} = (1, -1, 1)$. Dunque i versori di W sono $\underline{v}_1 = \underline{v}/\|\underline{v}\| = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e $\underline{v}_2 =$

$-\underline{v}/\|\underline{v}\| = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ Per determinare quale tra $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ formi un angolo acuto con il versore $\underline{j}$, basta ricordarsi che due vettori formano un anglo acuto se e solo se il coseno dell'angolo che formano è positivo, ovvero se e solo se il loro prodotto scalare è positivo. Si calcola immediatamente $\langle \underline{v}_1, \underline{j} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\langle \underline{v}_2, \underline{j} \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}$, dunque il versore richiesto è $\underline{v}_2$.

Soluzione esercizio 10. Una base di W è data dal vettore $(1, 1, 0)$. Ne segue che i vettori di W sono tutti e soli i vettori di $\mathbb{R}^3$ della forma $(\lambda, \lambda, 0)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Quelli di lunghezza 2 sono quelli per cui $\sqrt{\lambda^2 + \lambda^2} = 2$, ovvero quelli con $\lambda = \pm\sqrt{2}$. Esplicitamente, si tratta dei due vettori $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$.

Soluzione esercizio 11. Si ha $\langle \underline{f}_1, \underline{f}_2 \rangle = \frac{2}{\sqrt{150}} - \frac{2}{\sqrt{150}} = 0$ e quindi i due vettori sono ortogonali. Inoltre,

$$||\underline{f}_1|| = 1\,, \quad ||\underline{f}_2|| = 1$$

e quindi i due vettori sono ortonormali. Dato che le coordinate di $\underline{f}_1$ e quelle di $\underline{f}_2$ soddisfano l'equazione del piano, concludiamo che $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2\}$ costituiscono una base ortonormale del piano σ.

Per (ii): il suggerimento ci dice che

$$\underline{u}_1 = \langle \underline{u}, \underline{f}_1 \rangle \underline{f}_1\,, \quad \underline{u}_2 = \langle \underline{u}, \underline{f}_2 \rangle \underline{f}_2$$

e si tratta solo di fare i due prodotti scalari. Facendo i conti otteniamo $\langle \underline{u}, \underline{f}_1 \rangle = -1/\sqrt{5}$ e $\langle \underline{u}, \underline{f}_2 \rangle = 12/\sqrt{30}$; quindi $\underline{u}_1 = (-2, 1, 0)$, $\underline{u}_2 = (2/5, 4/5, 2)$.

Per giustificare il ragionamento del suggerimento basta ragionare come segue: sappiamo che $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$ con $\underline{u}_1 = \alpha \underline{f}_1$, $\underline{u}_2 = \beta \underline{f}_2$. Dato che $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$ è una base ortonormale di σ si ha:

$$\langle \underline{u}, \underline{f}_1 \rangle = \langle \alpha \underline{f}_1 + \beta \underline{f}_2, \underline{f}_1 \rangle = \alpha \langle \underline{f}_1, \underline{f}_1 \rangle + \beta \langle \underline{f}_2, \underline{f}_1 \rangle \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = \alpha.$$

Quindi $\langle \underline{u}, \underline{f}_1 \rangle = \alpha$; analogamente $\langle \underline{u}, \underline{f}_2 \rangle = \beta$, come volevasi.

Soluzione esercizio 12.

Basta scrivere l'equazione cartesiana $ax + by + cz = 0$ del piano $\mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ e prendere la retta generata dal vettore che ha coordinate (a, b, c). L'equazione cartesiana del piano è data da

$$\det \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

e cioè $x - y - z = 0$. La retta è data quindi da $\mathrm{Span}(1, -1, -1)$. Le equazioni parametriche sono immediate e quelle cartesiane si ottengono come al solito (Gauss + compatibilità) oppure tramite il teorema degli orlati imponendo che

$$\mathrm{rg} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1\,.$$

Notiamo che se fossimo interessati esclusivamente alle equazioni cartesiane della retta ortogonale al piano $W := \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ allora potremmo anche ragionare come segue:

$$(x, y, z) \perp W \Leftrightarrow (x, y, z) \perp \underline{v},\ \forall \underline{v} \in W \Leftrightarrow (x, y, z) \perp (1, 1, 0) \ \mathbf{e}\ (x, y, z) \perp (0, 1, 1)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la bilinearità del prodotto scalare per dimostrare l'implicazione $\Leftarrow$.
Ma

$$(x,y,z) \perp (1,1,0) \ \mathbf{e} \ (x,y,z) \perp (0,1,1) \Leftrightarrow$$

$$<(x,y,z),(1,1,0)>=0 \ \mathbf{e} \ <(x,y,z),(0,1,-1)>=0$$

e svolgendo i due prodotti scalari otteniamo finalmente le due equazioni cartesiane per la retta ortogonale:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

Quello appena spiegato è forse il metodo più rapido per scivere le equazioni cartesiane di una retta ortogonale ad un piano dato tramite una sua base.

Soluzione Esercizio 13.
(13.1) Il vettore $\underline{v}$ di coordinate incognite (x,y,z) è ortogonale al vettore $\underline{u}$ sse $<\underline{u},\underline{v}>=0$ sse $1/\sqrt{3}\,x+1/\sqrt{3}\,y+1/\sqrt{3}\,z=0$.
Ne segue che l'equazione cartesiana del piano ortogonale a $\underline{u}$ è $x+y+z=0$.
(13.1bis) Ker$T=\mathbb{R}\underline{u}$ dato che $\underline{v}\wedge\underline{u}=\underline{0}$ se e solo se $\underline{v}=\lambda\underline{u}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ (segue dalla definizione di prodotto vettoriale). Per determinare $\operatorname{Im} T$ consideriamo due vettori nel piano vettoriale τ, ortogonale a $\underline{u}$; siano essi $\underline{f}_1$ e $\underline{f}_2$. Scegliamo questi due vettori *ortonormali.* Allora $\{\underline{u},\underline{f}_1\underline{f}_2\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ e dalla definizione di prodotto vettoriale segue immediatamente che $T(\underline{f}_1)=\underline{f}_2$ oppure $T(\underline{f}_1)=-\underline{f}_2$; analogamente, $T(\underline{f}_2)=\underline{f}_1$ oppure $T(\underline{f}_2)=-\underline{f}_1$ (quale segno prendere dipendende dall'orientazione della base $\{\underline{u},\underline{f}_1\underline{f}_2\}$). Ma allora l'immagine di T contiene sicuramente il piano vettoriale τ e dato che dal teorema della dimensione,

$$\dim \mathrm{Ker}T+\dim\operatorname{Im}T=\dim\mathbb{R}^3=3$$

sappiamo che $\dim\operatorname{Im}T=2$ otteniamo che $\operatorname{Im}T=\tau$. Essendo τ il piano di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a $\underline{u}$, un'equazione cartesiana per $\operatorname{Im}T$ è stata già determinata: si tratta dell'equazione $x+y+z=0$. Una base ortonormale di $\operatorname{Im}T$ è, ad esempio, $\{(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}),(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})\}$. Infine rimangono da determinare equazioni cartesiane per la retta Ker$T$. Dato che si tratta della retta ortogonale al piano $\operatorname{Im}T$, e di questo abbiamo appena trovato una base, otteniamo subito le seguenti equazioni cartesiane per Ker$T$:

$$\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

(Abbiamo ragionato come nell'esercizio 12, alla fine.)
(13.2) Basta calcolare l'immagine dei vettori della base; per definizione di matrice associata ad un endomorfismo in una fissata base, le loro coordinate sono le colonne della matrice cercata. Utilizzando la formula per il prodotto vettoriale otteniamo: $T(\underline{i})=1/\sqrt{3}\underline{j}-1/\sqrt{3}\underline{k}$; $T(\underline{j})=-1/\sqrt{3}\underline{i}+1/\sqrt{3}\underline{k}$; $T(\underline{k})=1/\sqrt{3}\underline{i}-1/\sqrt{3}\underline{j}$.
Quindi la matrice cercata è:

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix}.$$

(13.3) La retta è generata dal vettore $(1, -2, 1)$. Quindi l'immagine di questa retta tramite T è data dal sottospazio generato dal vettore $T(1, -2, 1)$ che è dato dal vettore di coordinate

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{-3}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} .$$

Per trovare l'immagine di π basta selezionare una base di π e trasformarla. L'immagine di π tramite T è generata dal sottospazio generato da questi vettori trasformati. Si trova un piano. Lo stesso procedimento si applica a σ ma l'immagine è una retta. La differenza fra questi due piani è che π ha intersezione banale con Ker$T$ mentre σ contiene Ker$T$. Questa è la ragione per cui $T(\pi)$ è un piano, mentre $T(\sigma)$ è una retta.

Soluzione esercizio 14. Sappiamo che la simmetria ortogonale rispetto ad un piano π è uguale a $\mathrm{Id} - 2P_r$ con P_r la proiezione ortogonale sulla retta ortogonale al piano. Quindi, basta determinare la matrice associata alla proiezione ortogonale sulla retta ortogonale: per questo basta applicare agli elementi della base ortonormale fissata $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ la formula vista negli appunti, con $\underline{w}$ il vettore ortogonale al piano. Questa formula dice che la proiezione ortogonale di un vettore $\underline{v}$ su una retta Span($\underline{w}$) è data da

$$\frac{< \underline{v}, \underline{w} >}{< \underline{w}, \underline{w} >} \underline{w} .$$

Nel caso specifico abbiamo il vettore di coordinate $(1, 1, -1)$, ortogonale al primo piano, e il vettore $(1, 1, 1)$, ortogonale al secondo piano. Si trova, con un pó di conti:

$$A_1 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad A_2 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ne segue che la matrice associata a T è

$$\frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \\ -4 & -4 & -7 \end{vmatrix}$$

Una base per π è data dai vettori $\underline{f}_1 = (1, 1, 0)$ e $\underline{f}_2 = (0, 0, 1)$. Si ha

$$T\underline{f}_1 = \frac{1}{9}(-7, -7, -8) \qquad T\underline{f}_2 = \frac{1}{9}(4, 4, -7) ;$$

entrambi questi vettori appartengono a π che è quindi invariante per T.

Soluzione esercizio 15. Con uno degli usuali metodi si trova la matrice

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$