Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Prof. P. Piazza
Compito per le vacanze di Natale.

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intendere la lingua e conoscere i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto. (Galileo Galilei, *Saggiatore*)

Esercizio 0. Studiare la teoria vista ultimamente a lezione. Aggiungere: formule per distanza punto-punto, punto-piano, punto-retta e distanza retta-retta. Prodotto misto e sua interpretazione geometrica. Per dettagli consultare il *Programma d'esame al 19/12/2009.*

Esercizio 1. Sia A la matrice 2×2 data da
$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$
e sia $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da A.
Determinare la matrice associata all'applicazione lineare L_A con la seguente scelta di basi:
base di partenza $= \{(0,2),(1,1)\}$, base di arrivo $= \{(0,1),(1,2)\}$.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica fissata e coordinate associate $\underline{x}$. Consideriamo il piano vettoriale W di equazione cartesiana: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Determinare una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$ con coordinate associate $\underline{y}$ in modo tale che W abbia equazione $y_3 = 0$ nelle nuove coordinate.

Esercizio 3. Nello spazio affine $\mathcal{A}^3$ fissiamo un riferimento affine $RA(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ con coordinate associate (x, y, z). Siano $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{A}^3$ i punti di coordinate $(1, 2, 3)$, $(0, 2, -1)$ e $(1, 1, 1)$ rispettivamente. Verificare che P_1, P_2, P_3 non sono allineati. Dare l'equazione cartesiana del piano π contenente P_1, P_2, P_3.

Esercizio 4. Determinare l'equazione del piano per $Q_0 = (1, 2, -1)$ e parallelo alle rette r ed s di equazioni
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 3z = 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

Esercizio 5. Determinare equazioni cartesiane per la retta passante per $Q = (-1, -1, -1)$, contenuta nel piano π di equazione $x + y + z + 3 = 0$ e complanare alla retta s di equazioni
$$\begin{cases} x - 2z + 4 = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$
Suggerimenti:
(i) la retta cercata è intersezione di due piani; quali piani dobbiamo considerare ?
(ii) una volta individuati i piani dovete ottenere le loro equazioni cartesiane; può essere utile il metodo del fascio.....

Esercizio 6. Determinare equazioni cartesiane per il piano passante per $(-1, 0, 1)$ ed ortogonale alla retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + z + 2 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 7. Spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ con base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ fissata e coordinate associate (x, y, z). Applicare il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla seguente base di $\mathcal{V}_O$:

$$\underline{w}_1 = (1, 1, 0)\,, \quad \underline{w}_2 = (0, 1, 0)\,, \quad \underline{w}_3 = (0, 0, 2)\,.$$

Esercizio 8. Decidere se le due rette:

$$\begin{cases} x + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 2x + y - 2z + 6 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

sono complanari. In caso affermativo, stabilire se sono incidenti o parallele e determinare l'equazione del piano che le contiene.

Esercizio 9. Sia $W = \mathbb{R}(1, -1, 1)$ (Utilizziamo la notazione $\mathbb{R}(l, m, n)$ per il sottospazio $\mathrm{Span}((l, m, n))$.) Determinare un versore di questa retta. Determinare il versore di questa retta che forma un angolo acuto con il vettore $\underline{j}$ della base canonica.

Esercizio 10. Sia W la retta vettoriale di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Determinare i vettori di W che hanno lunghezza uguale a 2.

Esercizio 11. Consideriamo il piano vettoriale σ di equazione cartesiana

$$x + 2y - z = 0$$

(i) Verificare che i vettori

$$\underline{f}_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0) \qquad \underline{f}_2 = (\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}})$$

costituiscono una base *ortonormale* di σ.

(ii) Decomporre il vettore $\underline{u} = (0, 1, 2)$ del piano σ nella somma $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$ con $\underline{u}_1 \in \mathbb{R}\underline{f}_1$ e $\underline{u}_2 \in \mathbb{R}\underline{f}_2$. [1]

Esercizio 12. Spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ con base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ fissata e coordinate associate (x, y, z). Determinare equazioni parametriche e cartesiane per la retta ortogonale al piano generato da $\underline{w}_1 = (1, 1, 0)$ e $\underline{w}_2 = (0, 1, -1)$.

Esercizio 13. Avete visto l'operazione di prodotto vettoriale di due vettori. In questo esercizio dovete utilizzare quello che avete imparato sul prodotto vettoriale

[1] *Suggerimento per (ii).* Sappiamo che $\underline{u} \in \sigma$. Quindi esistono coefficienti α e β tali che $\underline{u} = \alpha\underline{f}_1 + \beta\underline{f}_2$ e per definizione sarà $\underline{u}_1 = \alpha\underline{f}_1$, $\underline{u}_2 = \beta\underline{f}_2$. Utilizzare il fatto che $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$ è una base ortonormale di σ e le proprietà di linearità del prodotto scalare per dimostrare che $\langle \underline{u}, \underline{f}_1 \rangle = \alpha$ e che $\langle \underline{u}, \underline{f}_2 \rangle = \beta$. Questo ragionamento non dovrebbe risultarvi nuovo....

ma anche molte delle nozioni viste durante questo corso di algebra lineare. Fissiamo una base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ e scegliamo l'orientazione fissata da tale base.

Sia $\underline{u}$ il vettore di coordinate $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$:

$$\underline{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{k}.$$

(13.1) Determinare l'equazione cartesiana del del sottospazio costituito dai vettori di $\mathcal{V}_O$ che sono ortogonali a $\underline{u}$.[2]

Si consideri l'applicazione $T : V \longrightarrow V$ che associa a $\underline{v}$ il vettore $\underline{u} \wedge \underline{v}$, con $\wedge$ uguale al prodotto vettoriale:

$$T\underline{v} = (\frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{k}) \wedge \underline{v}.$$

Dalle proprietà del prodotto vettoriale sappiamo che T è lineare.

(13.1bis) Perché possiamo affermare, senza fare i conti, che $\dim \mathrm{Ker} T = 1$ e $\dim \mathrm{Im} T = 2$? Di fatto, senza fare i conti possiamo determinare precisamente chi è il nucleo e chi è l'immagine. Cercate di dare un argomento... (Suggerimento: utilizzare la definizione e le properietà del prodotto vettoriale....)

(13.2) Scrivere la matrice associata a T nella base fissata $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$.

(13.3) Scrivere equazioni cartesiane per il nucleo $\mathrm{Ker}(T)$ e per per l'immagine $\mathrm{Im} T$. Dare una base per questi sottospazi. (Potete procedere analiticamente, utilizzando (2.2), oppure geometricamente come in (2.1bis).)

(13.4) Determinare l'immagine tramite T della retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Verificare che il piano π di equazione cartesiana $2x + 2y - 3z = 0$ ha immagine tramite T uguale ad un piano e si determini l'equazione cartesiana di tale piano. Verificate poi che il piano σ di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 0$ ha invece immagine tramite T uguale ad una retta. Come si spiega questa differenza?

Esercizio 14. Spazio vettoriale euclideo $\mathcal{V}_O$. Base ortonormale fissata. con coordinate (x, y, z) associate. Sono dati i piani

$$\alpha_1 : x + y - z = 0 \qquad \alpha_2 : x + y + z = 0$$

Siano S_1, S_2 le simmetrie ortogonali rispetto ad α_1, α_2 rispettivamente.

Scrivere le matrici associate a S_1 e S_2 nella base fissata (le denotiamo A_1 e A_2). Scrivere la matrice associata a $T := S_1 \circ S_2$. Verificare che il piano $\pi : x - y = 0$ è invariante per T (e cioè $T(\pi) \subset \pi$).

Esercizio 15. Sia $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito dalle relazioni

$$S(1,1,2) = (3,-1,2) \quad S(2,1,0) = (-2,5,0) \quad S(0,0,1) = (2,-2,1).$$

Determinare la matrice associata ad S nella base canonica.

[2] Brevemente: determinare l'equazione cartesiana del piano vettoriale ortogonale a $\mathbb{R}\underline{u}$.