Corso di dottorato a.a. 09-10

Operatori ellittici e topologia

Compito del 27/12/09 (Quinto ed ultimo compito)

Esercizio 1. Sia $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni a decrescenza rapida:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,|\, \forall \alpha, \beta \,\exists\, C_{\alpha\beta} \,\text{tale che}\, |x^\alpha D^\beta_x f| \leq C_{\alpha,\beta}\}\,.$$

Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; la sua trasformata di Fourier, $\hat{f}$, è la funzione

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>} f(x) dx \tag{1}$$

Dimostrare che $\hat{f} \in \mathcal{S}$. Verificare che per ogni multi-indice α

$$\xi^\alpha \hat{f} = \widehat{(D^\alpha_x f)} \tag{2}$$

Analogamente, dare e dimostrare una formula per $D^\alpha_\xi \hat{f}$. Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = \exp(-\frac{1}{2}|x|^2)$.

Esercizio 2. La convoluzione di due funzioni $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è definita come

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \tag{3}$$

Verificare che $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e che $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$. Utilizzando la formula d'inversione di Fourier verificare anche che $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$. Dimostrare che $(f, g)_{L^2} = (\hat{f}, \hat{g})_{L^2}$.

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto e consideriamo l'insieme $\tilde{S}^m(U \times \mathbb{R}^n)$ costituito da tutte le funzioni $p(x, \xi) \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^n)$ tali che per ogni compatto $K \subset U$, $\forall \alpha, \forall \beta, \exists\, C_{K,\alpha,\beta}$ tale che

$$|D^\alpha_x D^\beta_\xi p(x, \xi)| \leq C_{K,\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m-|\beta|} \quad x \in K, \xi \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

In altre parole, non richiediamo che p abbia x-supporto compatto ma richiediamo una stima su ogni compatto di U. Sia $u \in C^\infty_c(U)$; definiamo

$$Pu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) e^{i<x,\xi>} d\xi$$

Verificare che P definisce un operatore lineare

$$P : C^\infty_c(U) \to C^\infty(U)\,.$$

Sia $U = \mathbb{R}^n$ e supponiamo che $p(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ abbia la proprietà che $\forall \alpha, \forall \beta, \exists\, C_{\alpha,\beta}$ tale che

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|} \quad x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n \tag{5}$$

verificare che P manda $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Esercizio 4. Sia $a(x,y,\xi) \in S^d(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ us simbolo come nell'enunciato del lemma di Kuranishi. Abbiamo visto che se $a(x,y,\xi)$ è identicamente uguale a zero in un intorno della diagonale in $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y$ allora l'operatore

$$Au(x) = \int\int e^{i<x-y,\xi>} a(x,y,\xi) u(y) dy d\xi$$

è un operatore in $\Psi^{-\infty}$ e quindi $Au(x) = \int K(x,y)u(y)dy$ con $K \in C^\infty$. Dimostrate questo fatto direttamente, utilizzando l'identità

$$\Delta_\xi e^{i<x-y,\xi>} = |x-y|^2 e^{i<x-y,\xi>} \text{ con } \Delta_\xi := \sum_j D^2_{\xi_j}\,,$$

e l'integrazione per parti nell'integrale che definisce A (da giustificare).

Esercizio 5. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, sia $K \subset U$ un compatto e sia $P \in \Psi^d_K(U)$. Consideriamo $u, v \in C^\infty(U)$ con supporto in K. Si ha allora

$$(Pu,v)_{L^2} = \int\int\int e^{i<x-y,\xi>} p(x,\xi) u(y) \overline{v}(x) dy d\xi dx$$

Verificare che è possibile scambiare l'ordine di integrazione ottenendo:

$$(Pu,v)_{L^2} = \int\int\int e^{i<x-y,\xi>} p(x,\xi) u(y) \overline{v}(x) dx d\xi dy$$

Esercizio 6. Sia M una varietà differenziabile e sia $A \in \Psi^m(M)$. Sia $x \in \mathcal{O} \subset M$ con $\kappa : \mathcal{O} \to U$ una carta locale; abbiamo definito il simbolo principale di A calcolato in $\sum \xi^j d\chi_j(x) \in T^*M|_{\mathcal{O}}$ come il simbolo pricipale di A_U [1] calcolato in $(\chi(x),\xi) \in T^*U$. Verificare che il simbolo principale di A è globalmente definito.

Esercizio 7. Sia U un aperto di $\mathbb{R}^n$, siano $\alpha(1), \ldots \alpha(\ell)$ multiindici e siano $a_{\alpha(j)}(x) \in C^\infty_c(U)$, $j = 1, \ldots, \ell$.
Consideriamo l'operatore $P := \sum_j a_{\alpha(j)} R_{\alpha(j)}$ con

$$(R_{\alpha(j)}u)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} (\frac{\xi}{|\xi|})^{\alpha(j)} \hat{u}(\xi) d\xi$$

[1] l'operatore associato ad A nella carta $\kappa : \mathcal{O} \to U$

dove

$$(\xi/|\xi|)^\beta = \frac{(\xi_1^{\beta_1} \cdots \xi_n^{\beta_n})}{|\xi|^{|\beta|}}\,.$$

Verificare che $P = A + K$ con $A \in \Psi^*(U)$ e $K \in \Psi^{-\infty}$. Determinare l'ordine di A.
Suggerimento: considerare una funzione $C^\infty[0,\infty)$, $\chi(t)$, uguale a zero per t piccolo e uguale ad uno per t grande; considerare poi $p_j(x,\xi) := \chi(|\xi|)(\frac{\xi}{|\xi|})^{\alpha(j)}$...

Esercizio 8. Sia M una varietà compatta e sia $P \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M;E,F)$ un operatore pseudodifferenziale ellittico. Dimostrare che la proiezione ortogonale Π su $\mathrm{Ker}P$ è un operatore regolarizzante: $\Pi \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{cl}}$. (Suggerimento: utilizzare una base ortonormale del nucleo.)