Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Prof. P. Piazza

Soluzione compito a casa del 4/12/09

Soluzione esercizio 1. Sviluppando mediante la formula di Laplace rispetto alla prima riga troviamo

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Sviluppiamo adesso rispetto alla terza riga:

$$\det \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\det \begin{vmatrix} k & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \det \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 2(k-1) - (-1-k) = 3k - 1.$$

Una matrice quadrata è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero, pertanto la matrice data è invertibile se e solo se $k \neq 1/3$.

Soluzione esercizio 2. Calcoliamo il detrminante di A. Sviluppiamo il determinante di A rispetto alla prima riga mediante la formula di Laplace:

$$\det A = \det \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & h \\ x & y & z & w \end{vmatrix} = a \det \begin{vmatrix} d & 0 & 0 \\ f & g & h \\ y & z & w \end{vmatrix} - b \det \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ e & g & h \\ x & z & w \end{vmatrix}$$

Sviluppando ancora mediante la regola di Laplace rispetto alla prima riga troviamo

$$\det A = ad \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix} - bc \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix}$$

$$= (ad - bc) \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix}$$

Il determinante di B si calcola in modo perfettamente analogo, sviluppando rispetto alla prima colonna. In alternativa, il determinante di B è uguale al determinante della sua trasposta, che ha la stessa struttura di A.

Soluzione esercizio 3. La matrice dei coefficienti del sistema è

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Il determinante di questa matrice è uguale a 30, pertanto si tratta di una matrice non singolare. Ne segue che il sistema ammette un unica soluzione (x_1, x_2, x_3) data da

$$x_1 = \frac{\det\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{36}{30} = \frac{6}{5};$$

$$x_2 = \frac{\det\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{30} = -\frac{1}{5};$$

$$x_3 = \frac{\det\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5};$$

Soluzione esercizio 4. Direttamente dalla definizione segue che l'immagine di P_1 è la retta r, mentre il nucleo è il piano π. Analogamente, P_2 ha immagine uguale al piano e nucleo uguale allla retta. S_1 e S_2 sono biettive perché iniettive da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$; infatti è facile verificare che il nucleo di S_1 e S_2 è banale: $S_1(\underline{v}) = \underline{0} \Rightarrow \underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{0}$ $\Rightarrow \underline{v}_1 = \underline{v}_2 \Rightarrow \underline{v}_1 = \underline{v}_2 = \underline{0}$ perché $\underline{v}_1 \in r$, $\underline{v}_2 \in \pi$ e $r \cap \pi = \underline{0}$. Ad ogni modo, dovrebbe essere chiaro, per lo meno dalle figure che avete fatto, che $S^1 \circ S^1 = \mathrm{Id}$, $S^2 \circ S^2 = \mathrm{Id}$ il che implica ovviamente che S^1 e S^2 sono invertibili con inversa uguale a S^1 e S^2 rispettivamente.
Sicuramente $P_1(P_1\underline{v}) = P_1(\underline{v})$ $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ perchè $P_1(\underline{v})$ è un elemento della retta e quindi la sua decomposizione è $P_1\underline{v} = P_1\underline{v} + \underline{0}$ il che implica che $P_1(P_1\underline{v}) = P_1(\underline{v})$. Analogamente $P_2(P_2\underline{v}) = P_2(\underline{v})$ $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^3$. Riassumendo: $P_i^2 = P_i$ per $i = 1, 2$. Infine, $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ abbiamo $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_1 - \underline{v}_2 - \underline{v}_2 = \underline{v} - 2\underline{v}_2$; a destra c'è $S_1\underline{v}$; a sinistra c' è $\mathrm{Id}(\underline{v}) - 2P_2(\underline{v})$. Dato che questo è vero per ogni $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ concludiamo che $S_1 = \mathrm{Id} - 2P_2$. Similmente si dimostra l'altra relazione.