Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Prof. P. Piazza

Compito a casa del 4/12/09

Esercizio 1. Calcolare il determinante della matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

e determinare per quali valori di k la matrice è invertibile.

Esercizio 2. Consideriamo le matrici

$$A = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & h \\ x & y & z & w \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} a & b & l & m \\ c & d & n & p \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & z & w \end{vmatrix}.$$

Dimostrare che

$$\det B = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix}$$

Cosa possiamo dire circa $\det A$? [1]

Esercizio 3. Studiare il Teorema di Cramer, pag 160. (Corollario 9.11)
Verificare che la matrice dei coefficienti del seguente sistema è non singolare. Applicare il teorema di Cramer per determinare l'unica soluzione del sistema.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Esercizio 4 . Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Sia π un sottospazio vettoriale di dimensione 2, cioè un piano, ed r una retta non contenuta in π. Sappiamo che : $V = r \oplus \pi$; quindi ogni vettore $\underline{w}$ di $\mathbb{R}^3$ si scrive in maniera unica come $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$ con $\underline{w}_1 \in r$ e $\underline{w}_2 \in \pi$. Nel precedente compito abbiamo definito un'applicazione $P_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associando a $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ il vettore $\underline{w}_1 \in \mathbb{R}^3$: quindi $P_1(\underline{w}) = \underline{w}_1$ per definizione. Essa è, per definizione, la proiezione su r parallelamente a π. La legge $\underline{w} \longrightarrow \underline{w}_2$ definisce la proiezione su π parallelamente a r; questa è anche un'applicazione lineare ed è denotata tramite P_2. Quindi $P_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $P_2(\underline{w}) = \underline{w}_2$.

---

[1] Vale in generale la Proposizione : sia $N \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e supponiamo che

$$N = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix}$$

con $A \in M_{k,k}(\mathbb{R})$, $C \in M_{(n-k),(n-k)}(\mathbb{R})$, $B \in M_{k,(n-k)}(\mathbb{R})$, con $k < n$. Allora

$$\det N = \det A \cdot \det C\,.$$

La dimostrazione non è difficile; utilizza l'induzione su k ed è alla vostra portata.

Abbiamo altre due applicazione *lineari* definite dalla decomposizione $\mathbb{R}^3 = \pi \oplus r$. La simmetria S_1 rispetto a r parallelamente a π e la simmetria S_2 rispetto a π parallelamente a r:

$$S_1(\underline{w}) = \underline{w}_1 - \underline{w}_2 \qquad S_2(\underline{w}) = \underline{w}_2 - \underline{w}_1.$$

1. Disegnate π, r ed un generico $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ con $\underline{w} \notin r$, $\underline{w} \notin \pi$; sul disegno indicate $P_1(\underline{w})$, $P_2(\underline{w})$, $S_1(\underline{w})$, $S_2(\underline{w})$.
2.. Determinare l'immagine ed il nucleo di P_1 e P_2. Spiegare perché S_1 e S_2 sono biunivoche.
3. Verificare che sussistono le seguenti identità:

$$(P_1)^2 = P_1\,; \quad (P_2)^2 = P_2\,; \quad P_2 = \mathrm{Id} - P_1\,; \quad S_1 = \mathrm{Id} - 2P_2\,; \quad S_2 = 2P_2 - \mathrm{Id}\,.$$

È bene ricordare che se $T : V \to V$ è un'applicazione lineare allora T^2 è per definizione l'applicazione $T \circ T$ (che sappiamo essere ancora lineare) . In queste formule Id è l'applicazione identica, che manda $\underline{v}$ in $\underline{v}$.
Suggerimento: dire che due applicazioni $S, T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sono uguali vuol dire che $S(\underline{w}) = T(\underline{w}) \quad \forall \underline{w} \in \mathbb{R}^3$. Nel primo caso si tratta di dimostare che $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ si ha $P_1(P_1(\underline{v})) = P_1(\underline{v})$...Fate una figura per aiutarvi.