Corso di dottorato a.a. 09-10

Operatori ellittici e topologia

Compito del 3/12/09 (Quarto compito)

Esercizio 1. Sia L il fibrato tautologico su $\mathbb{C}P^1$. Abbiamo visto in classe che

$$\int_{\mathbb{C}P^1} c_1(L) = -1$$

1 Dimostrare che sussiste il seguente isomorfismo: $T^{1,0}\mathbb{C}P^1 = L^* \otimes L^*$. (Suggerimento: considerare le funzioni di transizione.)
2 Dimostrare che $\int_{\mathbb{C}P^1} c_1(T^{1,0}\mathbb{C}P^1) = 2$ utilizzando questo isomorfismo.

Esercizio 2. [1] Sia $\mathbb{H}$ l'algebra dei quaternioni. Verificare che si hanno i seguenti isomorfismi di algebre:

$$\mathrm{Cl}(1) \simeq \mathbb{C}\,, \quad \mathrm{Cl}(2) \simeq \mathbb{H}\,, \quad \mathrm{Cl}^0(2) \simeq \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$$

Esercizio 3. Verificare che $\mathrm{Cl}(3) \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Suggerimento: poniamo

$$x = \underline{e}_1,\ y = \underline{e}_2,\ z = \underline{e}_3$$

Verificare che l'unione delle seguenti 2 quadruple fornisce una base di Cl(3):

$$\frac{1+xyz}{2}\,, \quad \frac{xy-z}{2}\,, \quad \frac{yz-x}{2}\,, \quad \frac{zx-y}{2}\,;$$
$$\frac{1-xyz}{2}\,, \quad \frac{xy+z}{2}\,, \quad \frac{yz+x}{2}\,, \quad \frac{zx+y}{2}\,.$$

Utilizzare questa base per definire l'isomorfismo.

Esercizio 4. Siano E,F due fibrati vettoriali su M. Sia

$$P\ :\ C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$$

un operatore differenziale di ordine k: $P \in \mathrm{Diff}^k(M;E,F)$. Abbiamo dato in classe la definizione di simbolo principale

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(P) \in C^\infty(T*M, \mathrm{Hom}(\pi^*E, \pi^*F))\ :$$

[1] Denotiamo con $\mathrm{Cl}(k)$ l'algebra di Clifford associata allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^k$ dotato del prodotto scalare canonico. $\mathrm{Cl}(k) = \mathrm{Cl}^0(k) \oplus \mathrm{Cl}^1(k)$, con $\mathrm{Cl}^0(k)$ ($\mathrm{Cl}^1(k)$) la sottoalgebra generata dagli elementi che sono il prodotto di un numero pari (dispari) di elementi di $\mathbb{R}^k$. $\mathbb{C}\mathrm{l}(k)$ è la complessificazione di $\mathrm{Cl}(k)$. Una base ortonormale di $\mathbb{R}^k$ è denotata con $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_k\}$.

se $\xi \in T_x^*M$ ed $e_x \in E_x$; introduciamo $f \in C^\infty(M)$ ed $e \in C^\infty(M, E)$ tali che $df|_x = \xi$ e $e(x) = e_x$ e definiamo $\sigma_{\rm pr}(P)(\xi) \in Hom(E_x, F_x)$ come segue :

$$\sigma_{\rm pr}(P)(x,\xi)(e_x) = i^k \frac{1}{k!} P((f - f(x))^k e)(x)$$

Verificare che $\sigma_{\rm pr}(P)(\xi)$ non dipende dalle scelte fatte e che è una applicazione lineare da E_x in F_x.
Verificare che se M è uguale ad un aperto U di $\mathbb{R}^n$ e se E ed F sono i fibrati prodotto su U allora questa nozione si riduce alla usuale nozione di simbolo principale per una matrice (P_{ij}) di operatori differenziali: se

$$(P_{ij}) = \left(\sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(ij) \left(\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} \right)$$

allora

$$\sigma_{\rm pr}((P_{ij}))(x,\xi) = \left(\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(ij) (\xi^1)^{\alpha_1} \cdots (\xi^n)^{\alpha_n} \right).$$

Esercizio 5. Sia (M, g) una varietà riemanniana. Sia ∇ la connessione di Levi-Civita. Sia $\Lambda^* M := \Lambda^*(T^*M)$ con la sua naturale struttura di fibrato di moduli di Clifford (quindi $c(\xi) := \epsilon(\xi) - i(\xi)$).
Spiegare come ∇ induce una connessione $\nabla^{\Lambda^* M}$ sul fibrato $\Lambda^* M$. Dimostrare che questa connessione è di Clifford (vedere le note per la definizione).

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale e q una forma bilineare simmetrica. Sia $\mathrm{Cl}(V, q)$ l'algebra di Clifford associata. Dimostrare che l'applicazione naturale $V \to \mathcal{C}l(V, q)$ è iniettiva.
Sappiamo, si vedano le note, che $\mathrm{Cl}(V, q)$ è un'algebra filtrata. Dimostrare che esiste un isomorfismo fra l'algebra graduata associata a $\mathrm{Cl}(V, q)$, e cioè

$$\oplus_k (\mathrm{Cl}^k(V, q) / \mathrm{Cl}^{k-1}(V, q))$$

e l'algebra esterna $\Lambda^* V$