Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 2/12/09

Sia V uno spazio vettoriale e supponiamo che $V = V_1 \oplus V_2$. Ogni vettore $\underline{v} \in V$ può essere scritto *in maniera unica* come $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$, con $\underline{v}_j \in V_j$. Rimangono allora definite due applicazioni: $P_1 : V \to V$, la proiezione su V_1 parallelamente a V_2 e $P_2 : V \to V$, la proiezione su V_2 parallelamente a V_1; per definizione

$$P_1(\underline{v}) = \underline{v}_1 \quad \text{e} \quad P_2(\underline{v}) = \underline{v}_2 \quad \text{se} \quad \underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \,.$$

Esercizio 1. Verificare che P_1 e P_2 sono applicazioni lineari.
Suggerimento: utilizzare l'unicità della decomposizione.
Disegnare una decomposizione in somma diretta di $\mathbb{R}^2$; dare graficamente l'azione di P_1 e P_2 su un generico vettore di $\mathbb{R}^2$. Fare lo stesso esercizio per $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Sia π un sottospazio vettoriale di dimensione 2, cioè un piano, ed r una retta non contenuta in π. Si ha $V = r \oplus \pi$. Abbiamo definito due applicazioni lineari: $P_1 : V \to V$, la proiezione su r lungo π e $P_2 : V \to V$, la proiezione su π lungo r. Scrivere la matrice associata nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ alla proiezione P_2 sul piano π di equazione $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$ parallelamente alla retta $r = \mathbb{R}(1, 2, 1)$.
Suggerimento: c'è una base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ per cui la matrice associata a P_2 è estremamente facile a scriversi. Qual è questa base ?[1] Una volta scritta la matrice associata a P_2 in questa "base speciale", l'esercizio può essere completato utilizzando la formula (8.5) pag. 164.

[1] Per rispondere a questa domanda interrogatevi su come agisce P_2 sui vettori del piano π e sui vettori della retta r.