

Soluzione esercizio 1. Usiamo la linearità di F . Vogliamo calcolare le coordinate di $F(\underline{e}_1)$, $F(\underline{e}_2)$, $F(\underline{e}_3)$ nella base canonica; queste saranno le colonne della matrice cercata. Esprimiamo allora \underline{e}_1 come combinazione lineare degli elementi della nuova base $\{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\} \equiv \{(1, 1, 0); (0, 1, 1); (0, 0, 1)\}$, perché è su questi vettori che sappiamo calcolare F , ed applichiamo la linearità di F . In questo caso l'espressione di $(1, 0, 0)$ in funzione di $\{\underline{e}'_j\}$ è molto facile a stabilirsi:

$$(1, 0, 0) = (1, 1, 0) - (0, 1, 1) + (0, 0, 1)$$

Quindi

$$F(1, 0, 0) = F((1, 1, 0) - (0, 1, 1) + (0, 0, 1)) = F(1, 1, 0) - F(0, 1, 1) + F(0, 0, 1) = (1, 2, -1) - (-1, 1, 1) + (-1, 0, 1) = (1, 1, -1)$$

e questa è proprio la prima colonna della matrice A . Analogamente

$$F(0, 1, 0) = F((0, 1, 1) - (0, 0, 1)) = F(0, 1, 1) - F(0, 0, 1) = (-1, 1, 1) - (-1, 0, 1) = (0, 1, 0)$$

che è la seconda colonna della matrice A . Notiamo che $F(0, 0, 1)$ è dato nel testo dell'esercizio.

In definitiva

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Osserviamo che in questo caso era particolarmente semplice scrivere le coordinate dei vettori della base canonica rispetto alla base $\{\underline{e}'_j\}$. In generale bisognerà impostare 3 sistemi 3×3 . Una soluzione alternativa a questo esercizio è data più avanti, dopo l'esercizio 3.

Possiamo ora utilizzare A per rispondere all'ultimo quesito dell'esercizio. Il rango di A è due, come subito si verifica applicando l'eliminazione di Gauss. L'immagine di F è quindi generata da due vettori colonna di A non-proporzionali, ad esempio il primo ed il secondo. In particolare F non è suriettiva. Ne segue che non è neanche iniettiva; infatti il nucleo di F è il sottospazio vettoriale soluzione del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$. Dato che il rango è 2 si ha che $\text{Ker}F$ è un sottospazio di dimensione $3 - 2 = 1$.

Soluzione esercizio 2. La matrice associata a P rispetto alla base $\mathcal{G} = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ ha come colonne le coordinate di $P(\underline{g}_1)$, $P(\underline{g}_2)$ e $P(\underline{g}_3)$ rispetto alla base \mathcal{G} . Calcoliamo

$$\begin{aligned} P(\underline{g}_1) &= P(2\underline{e}_1 + \underline{e}_3) = 2P(\underline{e}_1) + P(\underline{e}_3) = 2(2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3) + (\underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3) \\ &= 5\underline{g}_1 + \underline{g}_2 - 3\underline{g}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\underline{g}_2) &= P(\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2) = P(\underline{e}_1) + 3P(\underline{e}_2) = (2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3) + 3(\underline{g}_2 + \underline{g}_3) \\ &= 2\underline{g}_1 + 3\underline{g}_2 + \underline{g}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\underline{g}_3) &= P(\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3) = P(\underline{e}_2) + 2P(\underline{e}_3) = (\underline{g}_2 + \underline{g}_3) + 2(\underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3) \\ &= 2\underline{g}_1 + 3\underline{g}_2 + 3\underline{g}_3 \end{aligned}$$

La matrice che rappresenta P nella base \mathcal{G} è pertanto

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Una soluzione alternativa a questo esercizio sarà data dopo la soluzione dell'esercizio 3.

Soluzione esercizio 3. Il testo dell'esercizio fornisce l'informazione

$$T\underline{v}_1 = \underline{u}_1 - \underline{u}_2, \quad T\underline{v}_2 = \underline{u}_1 + 3\underline{u}_2;$$

questo vuol dire che il testo dell'esercizio fornisce la matrice richiesta in **3.1**, e cioè la matrice, chiamiamola A_1 , associata a T con la scelta di basi:

$$\text{base partenza} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}, \quad \text{base arrivo} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}.$$

Vi ricordo infatti che la matrice A_1 è la matrice che ha come j -ma colonna le coordinate di $T\underline{v}_j$ rispetto alla base $\underline{u}_1, \underline{u}_2$. Quindi

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Si tratta ora di utilizzare la formula (8.4) nel libro di testo, che richiamiamo qui sotto, per trovare le matrici richieste in **3.2, 3.3, 3.4**.

Richiami di teoria. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di V e sia $\mathcal{C} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ una base di W . Sia $T: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare.

Sia A la matrice associata a T rispetto alla scelta

$$\mathcal{B} = \text{base di partenza}, \quad \mathcal{C} = \text{base di arrivo}.$$

Siano $\mathcal{B}' = \{\underline{v}'_1, \dots, \underline{v}'_n\}$ un'altra base di V e $\mathcal{C}' = \{\underline{w}'_1, \dots, \underline{w}'_m\}$ un'altra base di W .

Sia A' la matrice associata a T rispetto alla scelta

$$\mathcal{B}' = \text{base di partenza}, \quad \mathcal{C}' = \text{base di arrivo}.$$

Sia D la matrice del cambiamento di base, da \mathcal{C} a \mathcal{C}' : D è la matrice che ha come j -ma colonna le coordinate di \underline{w}'_j nella base \mathcal{C} :

$$\underline{w}'_j = \underline{w}_1 d_{1j} + \underline{w}_2 d_{2j} + \dots + \underline{w}_m d_{mj}.$$

Utilizzando la definizione di prodotto righe per colonne e ragionando qualche secondo capiamo che possiamo scrivere brevemente

$$\begin{vmatrix} \underline{w}'_1 & \dots & \underline{w}'_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{w}_1 & \dots & \underline{w}_m \end{vmatrix} D.$$

Sia B la matrice del cambiamento di base, da \mathcal{B} a \mathcal{B}' : scriviamo brevemente

$$\begin{vmatrix} \underline{v}'_1 & \dots & \underline{v}'_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{v}_1 & \dots & \underline{v}_n \end{vmatrix} B.$$

Allora:

$$(1) \quad A' = D^{-1}AB.$$

È bene riassumere schematicamente la situazione.

$$\begin{array}{l} A \text{ associata alla scelta } \mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \quad \mathcal{C} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\} \\ \mathbf{A}' \text{ associata alla scelta } \mathcal{B}' = \{\underline{v}'_1, \dots, \underline{v}'_n\} \quad \mathcal{C}' = \{\underline{w}'_1, \dots, \underline{w}'_m\} \\ \begin{vmatrix} \underline{v}'_1 & \dots & \underline{v}'_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{v}_1 & \dots & \underline{v}_n \end{vmatrix} B, \quad \begin{vmatrix} \underline{w}'_1 & \dots & \underline{w}'_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{w}_1 & \dots & \underline{w}_m \end{vmatrix} D \\ \mathbf{A}' = D^{-1}AB \end{array}$$

Fine richiami teoria.

Continuiamo con la soluzione dell'esercizio. Cominciamo con **3.2** e sia A_2 la matrice cercata. Sia $I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ la matrice identità 2×2 . È ovvio che I è invertibile ed uguale alla sua inversa (useremo questa informazione più tardi). La formula (8.4) del libro di Abate ci dice che

$$A_2 = D^{-1}A_1I = D^{-1}A_1$$

dove D è la matrice che ha come prima colonna le coordinate di \underline{v}_1 rispetto a $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ e come seconda colonna le coordinate di \underline{v}_2 rispetto a $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$.

È bene riassumere schematicamente la situazione.

Schematicamente abbiamo:

$$\begin{array}{l} A_1 \text{ associata alla scelta } \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} \quad \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\} \\ \mathbf{A}_2 \text{ associata alla scelta } \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \quad \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \\ \left| \begin{array}{cc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{array} \right| I, \quad \left| \begin{array}{cc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \underline{u}_1 & \underline{u}_2 \end{array} \right| D \\ \mathbf{A}_2 = D^{-1}A_1I \end{array}$$

Per determinare D^{-1} possiamo determinare prima D e poi calcolare la sua inversa. Notiamo tuttavia che D non è nota, perché non conosciamo le coordinate di \underline{v}_1 e \underline{v}_2 rispetto a $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ ¹. Tanto vale calcolare D^{-1} direttamente: vi ricordo che D^{-1} è la matrice tale che

$$\left| \begin{array}{cc} \underline{u}_1 & \underline{u}_2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{array} \right| D^{-1}$$

e cioè la matrice che ha come prima colonna le coordinate di $\underline{u}_1 = (1, 1)$ rispetto alla base $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ e come seconda colonna le coordinate di $\underline{u}_2 = (1, 0)$ rispetto alla base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$. Impostando il sistemino $(1, 1) = \alpha(1, 2) + \beta(-1, 1)$ e risolvendo scopriamo che

$$(1, 1) = \frac{2}{3}(1, 2) + \left(-\frac{1}{3}\right)(-1, 1)$$

Analogamente

$$(1, 0) = \frac{1}{3}(1, 2) + \left(-\frac{2}{3}\right)(-1, 1)$$

Ne segue che

$$D^{-1} = \left| \begin{array}{cc} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right|$$

e quindi in definitiva

$$A_2 = \left| \begin{array}{cc} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1/3 & 5/3 \\ 1/3 & -7/3 \end{array} \right|$$

Passiamo a **3.3**. Sia A_3 la matrice cercata. È chiaro dalla soluzione di **3.2** che conviene determinare A_3 sulla base di A_2 perché in tale maniera una delle matrici che compaiono nella formula (8.4) del libro di testo sarà l'identità. Ciò sarà chiaro dallo schemino che segue. Schematicamente abbiamo infatti

$$A_2 \text{ associata alla scelta } \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} \quad \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$$

¹ D è la matrice che ha come prima colonna le coordinate di \underline{v}_1 rispetto alla base $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ e come seconda colonna le coordinate di \underline{v}_2 rispetto alla base $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_3 \text{ associata alla scelta } \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \quad \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \\ |\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2| = |v_1 \quad v_2| D^{-1}, \quad |\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2| = |v_1 \quad v_2| I \\ \mathbf{A}_3 = I^{-1} A_2 D^{-1} = A_2 D^{-1} \end{aligned}$$

A questo punto basta fare il prodotto.

Consideriamo **3.4.** e sia A_4 la matrice cercata. In questo caso conviene determinarla utilizzando A_1 oppure A_3 . Facciamolo con A_1 . Schematicamente abbiamo allora

$$\begin{aligned} A_1 \text{ associata alla scelta } \{v_1, v_2\} \quad \{u_1, u_2\} \\ \mathbf{A}_4 \text{ associata alla scelta } \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \quad \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \\ |\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2| = |v_1 \quad v_2| D^{-1}, \quad |\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2| = |u_1 \quad u_2| I \\ \mathbf{A}_4 = I^{-1} A_1 D^{-1} = A_1 D^{-1} \end{aligned}$$

e di nuovo basta ora fare il prodotto.

Nuova soluzione esercizio 1. Faremo di nuovo uso della formula (8.4) del libro. In questo caso $V = W (= \mathbb{R}^3)$. Consideriamo la base

$$\mathbf{e}'_1 = (1, 1, 0) \quad \mathbf{e}'_2 = (0, 1, 1), \quad \mathbf{e}'_3 = (0, 0, 1)$$

I dati del problema forniscono immediatamente la matrice A associata ad F rispetto alla seguente scelta di basi:

$$\text{base di partenza} = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}, \quad \text{base di arrivo} = \text{base canonica}.$$

Vi ricordo infatti che tale matrice è, per definizione, la matrice che ha come j -ma colonna le coordinate, nella base di arrivo, del vettore $F(\mathbf{e}'_j)$. Ma questa è proprio l'informazione che ci viene data dal testo del problema. Quindi

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Vogliamo ora determinare la matrice A' associata ad F rispetto alla scelta di basi

$$\text{base di partenza} = \text{base canonica}, \quad \text{base di arrivo} = \text{base canonica}.$$

Lo schema è il seguente. Sia I_3 la matrice identità 3×3 .

$$\begin{aligned} A \text{ associata a } \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}, \quad \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}. \\ \mathbf{A}' \text{ associata a } \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \quad \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}. \\ |\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3| = |\mathbf{e}'_1 \quad \mathbf{e}'_2 \quad \mathbf{e}'_3| B, \quad |\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3| = |\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3| I_3 \\ \mathbf{A}' = I_3^{-1} A B = A B \end{aligned}$$

La matrice B è al momento sconosciuta; d'altra parte essa è l'inversa della matrice B' che ha come colonne le coordinate dei vettori $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ nella base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (che è la base canonica). Quest'ultima matrice è invece nota perché è data nel testo del problema

$$B' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Quindi

$$B = (B')^{-1} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right)^{-1}$$

da cui, calcolando l'inversa,

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Concludendo

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Nuova soluzione esercizio 2. I dati del problema ci danno la matrice A che rappresenta l'applicazione lineare P rispetto alla base canonica come base di partenza e alla base \mathcal{G} come base di arrivo. Abbiamo

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

La matrice richiesta dall'esercizio è la matrice A' associata alla scelta \mathcal{G} in partenza e in arrivo. Siete ormai esperti e scrivo direttamente la conseguenza della magica formula (8.4) (fatevi voi lo schemino per convincervi che non ho sbagliato)

$$A' = I_3^{-1} \cdot A \cdot B$$

La matrice B è la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori della base \mathcal{G} rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 . Dai dati dell'esercizio abbiamo pertanto

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Otteniamo così

$$A' = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$