Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 27/11/09

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^3$. È facile verificare che l'applicazione lineare definita da

$$F(1,1,0) = (1,2,-1)\,, \quad F(0,1,1) = (-1,1,1)\,, \quad F(0,0,1) = (-1,0,1)$$

è ben definita [1].
Consideriamo la base canonica

$$\mathcal{E} = \{\underline{e}_1 := (1,0,0), \underline{e}_2 := (0,1,0), \underline{e}_3 := (0,0,1)\}$$

in $\mathbb{R}^3$.
Determinare la matrice A associata ad F con la seguente scelta di basi

$$\text{base di partenza} = \mathcal{E}\,, \quad \text{base di arrivo} = \mathcal{E}$$

Studiare iniettività e suriettività di F.

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ fissata. Sia P l'applicazione lineare $P : V \longrightarrow V$ definita da

$$P\underline{e}_1 = 2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_2 = \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_3 = \underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,, \tag{1}$$

con $\{\underline{g}_1 = (2,0,1)\,, \underline{g}_2 = (1,3,0)\,, \underline{g}_3 = (0,1,2)\}$. È subito visto che questi 3 vettori costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare la matrice associata a P in questa base (quindi, base di partenza = base di arrivo = base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2\, \underline{g}_3\}$).

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^2$. Verificare che i seguenti 2 vettori sono una base di $\mathbb{R}^2$:

$$\underline{v}_1 = (1,2)\,, \quad \underline{v}_2 = (-1,1).$$

Verificare che i seguenti 2 vettori sono un'altra base di $\mathbb{R}^2$:

$$\underline{u}_1 = (1,1)\,, \quad \underline{u}_2 = (1,0)$$

Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$T\underline{v}_1 = \underline{u}_1 - \underline{u}_2\,, \quad T\underline{v}_2 = \underline{u}_1 + 3\underline{u}_2$$

Utilizzando opportune matrici di cambiamento di base risolvere i seguenti esercizi:
3.1 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$
3.2 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$
3.3 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$
3.4 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$

[1] i tre vettori $\{(1,1,0); (0,1,1); (0,0,1)\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$