Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Prof. P. Piazza
Soluzione compito a casa del 20/11/09

Soluzione esercizio 1. Una matrice $n \times n$ è invertibile se e solo se è non-singolare, cioè se e solo se il rango è uguale a n. Utilizzando la riduzione di Gauss si verifica facilmente che per la nostra matrice $A \in M_{33}(\mathbb{R})$ si ha $\mathrm{rg}(A) = 3$. La matrice data è quindi invertibile. Per determinare l'inversa scriviamo

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e applichiamo Gauss a scendere, Gauss a salire e la divisione per i pivots. Otteniamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3/7 & 1/7 & -2/7 \\ -2/7 & -3/7 & 6/7 \\ -1/7 & 2/7 & 3/7 \end{vmatrix}$$

Ne segue che

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 3/7 & 1/7 & -2/7 \\ -2/7 & -3/7 & 6/7 \\ -1/7 & 2/7 & 3/7 \end{vmatrix}$$

L'inversa di L_A è data da $L_{A^{-1}}$.

Soluzione esercizio 2. Si ha

$$AB = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$$

Soluzione esercizio 3. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ e sia $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$. La matrice B del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è *la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate del j-mo vettore della base $\mathcal{B}'$ rispetto alla base $\mathcal{B}$*. Nel nostro caso

$$\underline{v}_1 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2\,, \quad \underline{v}_2 = \underline{e}_1 - \underline{e}_2$$

e quindi

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Ne segue, per quanto visto a lezione (Abate, Sezione 8.1), che

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix}$$

da cui segue anche

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

Calcoliamo l'inversa dell matrice $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ mediante l'algoritmo di Gauss:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} \to$$

$$\to \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix}$$

Abbiamo cioè

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

Come già osservato, le matrici B e C sono inverse l'una dell'altra.
Infine, per determinare l'equazione cartesiana di U nelle coordinate y_1, y_2, osserviamo che l'equazione cartesiana di U nelle coordinate x_1, x_2 si scrive

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = 0$$

e mediante la sostituzione

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix}$$

troviamo l'equazione cartesiana di U nelle coordinate y_1, y_2:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = 0$$

ovvero

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

L'equazione cartesiana di U nelle coordinate y_1, y_2 è pertanto $-y_1 + 3y_2 = 0$.