Corso di dottorato a.a. 09-10

Operatori ellittici e topologia

Compito del 19/11/09 (Terzo compito)

Esercizio 1.
1. Verificare che $\mathbb{C}P^n$ è una varietà complessa di dimensione (complessa) n.
Suggerimento: sia $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}P^n$ la proiezione canonica e denotiamo $\pi(z_0, \dots, z_n) = [z_o, \dots, z_n]$. Consideriamo gli aperti

$$U_i = \{[z_0, \dots, z_n] \quad z_i \neq 0\}$$

e le applicazioni $\phi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$, $\phi_i[z_0, \dots, z_n] = (z_0/z_i, \dots, \hat{i}, \dots, z_n/z_i)$. Definire a partire da $\{(U_i, \phi)\}$ una struttura di varietà complessa di dimensione (complessa) n.
2. Sia $L := E_1(\mathbb{C}^{n+1})$ il fibrato universale su $\mathbb{C}P^n$. Verificare che L è un fibrato complesso di rango 1 e olomorfo.
3 Consideriamo in particolare $\mathbb{C}P^1$. Descrivere le funzioni di transizione di L^k, $k \in \mathbb{N}$ (con L^k uguale al prodotto tensoriale di L con se stesso k volte). Descrivere le funzioni di transizione di $(L^*)^k$. Poniamo $L^{-k} = (L^*)^k$.
Vero o falso : $\ell \neq k \Rightarrow$ *L^ℓ e L^k non sono isomorfi.*
(Osserviamo che le funzioni di transizione del prodotto tensoriale sono il prodotto tensoriale delle funzioni di transizione. Qui parliamo di un fibrato di rango 1, quindi...).

Esercizio 2. Dimostrare che la Grassmanniana $G_k(\mathbb{C}^n)$ è una varietà complessa. Dimostrare che il fibrato universale $E_k(\mathbb{C}^n) \to G_k(\mathbb{C}^n)$ è un fibrato olomorfo.

Esercizio 3. Abbiamo visto in classe che

$$\int_{\mathbb{C}P^1} c_1(T^{1,0}\mathbb{C}P^1) = 2 \tag{1}$$

come applicazione del teorema di Gauss-Bonnet in dimensione 2. Abbiamo anche visto che da (1) segue

$$\int_{\mathbb{C}P^1} e(T\mathbb{C}P^1) = 2 \tag{2}$$

(i) Consideriamo $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ con la metrica indotta. Sia ∇ la connessione ottenuta per proiezione dall' usuale differenziale in $\mathbb{R}^3$. Verificare direttamente che

$$e(TS^2, \nabla) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{dvol}\,.$$

Dedurne (2).

(ii) Sia $M = S^2 \times \cdots S^2$ (n prodotti). Calcolare $\int_M e(M)$.

Esercizio 4. Sia L il fibrato tautologico su $\mathbb{C}P^1$. Dimostrare che sussiste il seguente isomorfismo: $T^{1,0}\mathbb{C}P^1 = L^* \otimes L^*$. (Suggerimento: considerare le funzioni di transizione.)

Esercizio 5. Sia M una varietà differenziabile orientabile di dimensione 4ℓ. Fissiamo indici $i_1, \ldots, i_k$ tali che $i_1 + \cdots + i_k = \ell$ e definiamo il numero di Pontrjagin associato a $i_1, \ldots, i_k$ come

$$\int_M p_{i_1}(M) \wedge \cdots \wedge p_{i_k}(M)$$

Supponiamo ora che M sia il bordo di una varietà orientabile di dimensione $4\ell + 1$: $M = \partial W$. Dimostrare che allora tutti i numeri di Pontrjagin sono nulli.
(Suggerimenti: (i) utilizzando la normale al bordo si ha $TW|_{\partial W} \equiv TW|_M = TM \oplus 1$, dove abbiamo denotato con 1 un fibrato banale di rango 1. (ii) Utilizzare il teorema di Stokes.)