Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Prof. P. Piazza

Testo e soluzione dell'esonero del 17/11/06

Trovate qui testo e soluzione degli esercizi di tutte le versioni dell'esonero. Per esercizi concettualmente simili ho riportato un solo testo e una sola soluzione.

Esercizio 1. Determinare tutti i numeri complessi w tali che $w^3 + i = 0$.

Soluzione. L'esercizio chiede di determinare le radici terze del numero complesso $-i$. Dato che $-i = \cos(\frac{3}{2}\pi) + i\sin(\frac{3}{2}\pi)$ otteniamo subito le radici terze z_0, z_1, z_2 utilizzando la formula 4.17 del libro

$$z_0 = \cos(\frac{\frac{3}{2}\pi}{3}) + i\sin(\frac{\frac{3}{2}\pi}{3}) = i$$

$$z_1 = \cos(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2\pi}{3}) + i\sin(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

$$z_2 = \cos(\frac{\frac{3}{2}\pi + 4\pi}{3}) + i\sin(\frac{\frac{3}{2}\pi + 4\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

Esercizio 2. Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ è reale il numero

$$\frac{x - 2 + ix}{x - 3 + i5}$$

Soluzione. Si ha:

$$\frac{x - 2 + ix}{x - 3 + i5} = \frac{(x - 2 + ix)(x - 3 - i5)}{x^2 - 6x + 34} = \frac{(x^2 - 10x + 6) + i(x^2 + 2x - 10)}{x^2 - 6x + 34}$$

Dobbiamo quindi imporre che $(x^2 + 2x - 10) = 0$; otteniamo $x = -1 \pm \sqrt{11}$

Esercizio 3. Consideriamo $(1-i\sqrt{3})^{-12}$. Scrivere questo numero nella forma $\alpha+i\beta$ con α e β reali.

Soluzione. È subito visto che

$$1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)$$

Quindi

$$(1 - i\sqrt{3})^{-12} = 2^{-12}\left(\cos(\frac{12\pi}{3}) + i\sin(\frac{12\pi}{3})\right) = 2^{-12}(1 + i0) = 2^{-12}$$

Esercizio 4. (i) Sia $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ e sia

$$W = \{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \text{ tali che } ad - bc = 0\}$$

Stabilire se il sottoinsieme W è un sottospazio vettoriale di V.
(ii) Sia $V = \mathbb{R}^n$ e sia $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ tali che $\exists j$ con $x_j = 0\}$ (W è il sottoinsieme delle n-ple che hanno almeno una coordinata uguale a zero.) Stabilire se W è un sottospazio.

Soluzione.
(i) Non è un sottospazio. Intuitivamente chiaro dato che W è dato da relazioni quadratiche. Rigorosamente:

$$A_1 := \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \in W\,, A_2 := \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \in W\,,\ \text{ma } A_1 + A_2 \notin W\,.$$

(ii) Non è un sottospazio. W è l'unione insiemistica degli iperpiani coordinati $I_j := \{\underline{x} \mid x_j = 0\}$. Abbiamo visto ad esempio per $\mathbb{R}^2$ che questa unione non è un sottospazio. Rigorosamente:

$$\underline{w}_1 := (0, 1, \ldots, 1) \in W\,,\ \ \underline{w}_2 := (1, 0, \ldots, 0) \in W\,,\ \ \text{ma } \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \notin W.$$

Esercizio 5. (i) Stabilire se il sottoinsieme W di $\mathbb{R}^n$ definito da $W = \{\underline{x} \mid x_j \geq 0 \forall j\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Stabilire se è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$.
(ii) Sia $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ e sia

$$W = \{ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \text{ tali che } a + d - bc = 0\}$$

Stabilire se il sottoinsieme W è un sottospazio vettoriale di V.

Soluzione. (i) W non è un sottospazio vettoriale perché $(-1)\underline{w} \notin W$ se $\underline{w} \in W$. Intuitivamente questo doveva essere chiaro. Non è neanche un sottospazio affine perché se lo fosse allora potremmo scrivere $W = \underline{v}_0 + U$ con $\underline{v}_0$ uno specifico vettore di $\mathbb{R}^n$ e U sottospazio. Ma, necessariamente, $U = W - \underline{v}_0$ e $W - \underline{v}_0$ non è mai un sottospazio, quale che sia la scelta di $\underline{v}_0$. (Anche questo è intuitivamente chiaro. Per i dettagli possiamo procedere come segue: $\forall \underline{w} \in W$ le coordinate di $\underline{w} - \underline{v}_0$, che è un elemento di U, sono tutte $\geq -k$ per un certo k che dipende da $\underline{v}_0$ (possiamo scegliere k uguale alla più piccola coordinata di $\underline{v}_0$). Supponiamo, per fissare le idee, che k sia positivo e che esista una coordinata di $\underline{v}_0$ che sia più grande di k. Scegliamo $\underline{w}$ con coordinate uguali ai valori assoluti delle coordinate di $\underline{v}_0$. Sappiamo che $\underline{u}_1 := \underline{w} - \underline{v}_0 \in U$ e che $\underline{u}_2 := -\underline{v}_0 \in U$ (perché $\underline{0} \in W$); quindi anche $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 = -(\underline{w} - \underline{v}_0) - \underline{v}_0 = -\underline{w}$ deve appartenere a U. Ma le coordinate di $-\underline{w}$ sono tutte $\leq -k$; quindi $\underline{u}_1 + \underline{u}_2$ non è in U, contro l'ipotesi che U sia un sottospazio.)
(ii) Non è un sottospazio. Ad esempio

$$A_1 := \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \in W\,,\ \ A_2 := \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \in W \ \text{ ma } \ A_1 + A_2 \notin W.$$

Esercizio 6. (i) Sia $V = M_{n,n}(\mathbb{R})$ e sia

$$W = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \text{ tali che } a_{ij} = 0 \text{ se } i < j; a_{jj} = j\}$$

Stabilire se il sottoinsieme W è un sottospazio vettoriale di V. Stabilire se il sottoinsieme W è un sottospazio affine di V.
(ii) Sia $V = \mathbb{R}^5$. Stabilire se il sottoinsieme

$$W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \text{ tali che } x_1 x_3 x_5 = 0\}$$

è un sottospazio.
Giustificare le risposte.

Soluzione.
(i) W non è un sottospazio, perché non contiene il vettore nullo. È us sottospazio affine; precisamente è il sottospazio affine ottenuto traslando il sottospazio vettoriale $U = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tali che $a_{ij} = 0$ se $i \leq j\}$ con la matrice A_0 definita da

$$(A_0)_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j\,, \;\; (A_0)_{jj} = j\,.$$

(ii) W non è un sottospazio. Ad esempio $(0, 1, 1, 1, 1) \in W$, $(1, 1, 0, 1, 1) \in W$ ma $(0, 1, 1, 1, 1) + (1, 1, 0, 1, 1) \notin W$.

Esercizio 7. (i) Sia $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ e sia

$$W = \{ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \text{ tali che } a + d - b + c = 0\}$$

Stabilire se W è un sottospazio vettoriale. Stabilire se

$$W' = \{ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \text{ tali che } a + d - b + c = 10\}$$

è un sottospazio affine.
(ii) Sia $V = \mathbb{R}_n[x]$, lo spazio vettoriale dei polinomi di grado $\leq n$. Sia $W = \{\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n, \alpha_j \in \mathbb{R}\}$. Stabilire se W è un sottospazio vettoriale. Stabilire se $W' = \{10 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n, \alpha_j \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio affine. Giustificare le risposte.

Soluzione. (i) W è un sottospazio, perché dato dalle soluzioni di un' equazioni lineare *omogenea*. W' è un sottospazio affine, perché dato dalle soluzioni di un' equazioni lineare *non omogenea*. (Qui occorrerebbe introdurre l'isomorfismo fra $M_{2,2}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^4$...)
(ii) W è un sottospazio, come subito si verifica. W' è un sottospazio affine, ottenuto traslando con il polinomio costante $p(x) = 10$ il sottospazio W.

Esercizio 8. (i) Studiare al variare del parametro t la compatibilità del sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + tx_2 + tx_3 + tx_4 = t \\ tx_1 + 2(t-1)x_2 + 2x_3 + 2x_4 = t^2 - 2 \\ x_1 + x_2 + (t-1)x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni per i sistemi definiti dai $t \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema ammette infinite soluzioni. Per tali valori di t descrivere l'insieme delle soluzioni come un sottospazio affine $\underline{v} + W$ di $\mathbb{R}^4$, determinando in particolare una base per il sottospazio W.
(i)-bis (facoltativo) Trovare l'insieme delle soluzioni $\forall t$
(ii) Sia $A_t \in M_{44}(\mathbb{R})$ la matrice dei coefficienti del sistema e sia $L_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da A_t. Studiare iniettività e suriettività di L_t al variare di t. Determinare una base del nucleo ed una base dell'immagine di L_t al variare di t.

Soluzione. Occorre ridurre a scala la matrice completa del sistema utilizzando il metodo di Gauss. Consideriamo quindi

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & t & t & t & t \\ t & 2(t-1) & 2 & 2 & t^2-2 \\ 1 & 1 & t-1 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

Dopo il primo passo otteniamo subito

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-2 & t-2 & t-2 & t-2 \\ 0 & t-2 & 2-t & t-2 & t^2-t-2 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 & 0 \end{array}\right| \tag{1}$$

Se $t = 2$ il sistema è allora equivalente alla singola equazione

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

che ha infinite soluzioni, ottenute risolvendo x_1 (che è quindi variabile dipendente) in funzione delle altre variabili (che sono quindi le variabili libere). Esplicitamente, scriviamo $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 + 1$, aggiungiamo le identità $x_2 = x_2$, $x_3 = x_3$, $x_4 = x_4$ ottenendo

$$\left|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} -x_2 - x_3 - x_4 + 1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\right| = x_2 \left|\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right| + x_3 \left|\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right| + x_4 \left|\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right| .$$

Otteniamo in questo modo l'insieme di soluzioni nella forma voluta, e cioè come il sottospazio affine $\underline{v}_0 + W$ con

$$\underline{v}_0 = \left|\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right| \quad \text{e} \quad W = \mathrm{Span}\left(\left|\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right|, \left|\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right|, \left|\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right| \right) . \tag{2}$$

Se $t \neq 2$ allora possiamo moltiplicare la seconda, terza e quarta riga di (1) per $1/(t-2)$. Otteniamo la matrice

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & t+1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Riducendo ulteriormente otteniamo la matrice

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & t \\ 0 & 0 & 0 & -1 & t/2 \end{array}\right|$$

Notare che la matrice dei coefficienti non dipende da t. Ne deduciamo che per ogni $t \neq 2$ la matrice dei coefficienti ha rango 4 ed esiste quindi unica la soluzione. Fissato $t \neq 2$ otteniamo la soluzione $x_1 = 0, x_2 = (t+2)/t, x_3 = 0, x_4 = -t/2$.
L'applicazione lineare definita da A_t è bigettiva per ogni $t \neq 2$. Per questi t il nucleo è banale e l'immagine è tutto $\mathbb{R}^4$.
Per $t = 2$ il nucleo è il sottospazio W che compare nella formula (2). Una base è

data dai vettori che compaiono in (2). L'immagine ha dimensione uguale al rango della matrice A_t per $t=2$ che sappiamo essere uguale a 1 (potete in alternativa applicare il teorema della dimensione). L'immagine è generata da una qualsiasi colonna della matrice A_t, $t=2$, ad esempio $(1,2,2,1)$.

Esercizio 9. Siano $U, V \subset \mathbb{R}^3$ i sottospazi dati da

$$U = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{vmatrix} \right), \quad V = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \right).$$

Determinare una base di $U \cap V$. Stabilire se $U+V=\mathbb{R}^3$. Stabilire se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$. Determinare un sottospazio W, tramite equazioni cartesiane, tale che $(U \cap V) \oplus W = \mathbb{R}^3$

Soluzione. Mettendo i 3 generatori di U in colonna e riducendo con Gauss capiamo subito che U ha dimensione 2. Una sua base è data da una qualsiasi coppia di vettori scelti fra i 3 generatori (infatti i 3 generatori sono a due a due non-proporzionali). È chiaro che V ha dimensione 2. Per trovare una base per $U \cap V$ passiamo ad equazioni cartesiane. Per U riduciamo con Gauss la matrice

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 2 & -2 & x_2 \\ -3 & 0 & x_3 \end{array} \right|$$

e imponiamo la compatibilità. Otteniamo l'equazione cartesiana $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Analogamente procediamo per V, ottenendo l'equazione $x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0$. L'intersezione è data dalla retta vettoriale soluzione del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

e cioè $\text{Span}((-7,2,5))$. $U+V$ è sicuramente uguale a $\mathbb{R}^3$ perché è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ ed ha dimensione $\dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 2+2-1 = 3$ (da Grassmann). Ovviamente $\mathbb{R}^3$ *non* è somma diretta di U e V, perché l'intersezione è non-banale. Infine, per determinare W ragioniamo come segue: W deve essere un piano ed è quindi dato da una equazione omogenea $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0$. Basterà prendere una qualsiasi equazione non soddisfatta dal generatore di $U \cap V$, ad esempio $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Le soluzioni W di questa eq. costituiscono un piano che per costruzione ha intersezione banale con $U \cap V$; quindi, ad esempio da Grassmann, $(U \cap V) + W = \mathbb{R}^3$ e dato che $(U \cap V) \cap W = \underline{0}$ deduciamo che $(U \cap V) \oplus W = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 10. Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalla legge:

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \\ -2 \end{vmatrix}$$

Scrivere l'espressione in coordinate di T: $T \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \ldots.$ Determinare C tale che $T = L_C$. Studiare iniettività e suriettività di T.

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che i due vettori immagine sono proporzionali; T non è quindi iniettiva, dato che manda $2 \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix}$ nel vettore nullo.

Il nucleo ha quindi dimensione almeno 1; di fatto ha dimensione precisamente 1 perché non ha dimensione 2 (l'applicazione T non è l'applicazione nulla, unica applicazione cha il nucleo uguale a tutto il dominio). È chiaro che T non può essere suriettiva, dato che la sua immagine ha dimensione $\dim \mathbb{R}^2 - \dim \mathrm{Ker} T = 1$. Tutto ciò risponde alla domanda sulla suriettività ed iniettvità di T.
Si ha poi

$$T \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = T(x_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}) = x_1 T \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + x_2 T \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Ma

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix} \right) , \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \left(\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix} \right) .$$

Quindi

$$T \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \frac{x_1}{2} (T \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} + T \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix}) + \frac{x_2}{4} (T \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} - T \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix})$$

Utilizzando la definizione di T otteniamo la desiderata espressione in coordinate.