Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Prof. P. Piazza
Soluzione compito a casa del 13/11/09

Soluzione esercizio 1. La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La matrice completa è

$$A|b = \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 4t \end{array}\right|$$

Per studiare al compatibilità del sistema utilizziamo l'algoritmo di eliminazione di Gauss:

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 4t \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 4t-3 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 4t-3 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4t-4 \end{array}\right|$$

Dunque il sistema ammette soluzioni solamente se $4t - 4 = 0$ ovvero se e solo se $t = 1$. Per questo particolare valore di t, la matrice del sistema ridotto a scala è

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Le ultime due righe corrsispondono all'identità $0 = 0$ e possono essere eliminate. Rimaniamo così con la matrice

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

che mediante un'ulteriore eliminazione diventa

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

Le variabili dipendenti sono x_1 e x_3, quelle libere, x_2, x_4, x_5. Otteniamo,

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

che possiamo riscrivere come

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$$

che è proprio la forma richiesta nel testo dell'esercizio. Notiamo che da questa soluzione segue anche che

$$\ker L_A = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$$

Infine, l'immagine di L_A è generata dalle colonne della matrice A. Per estrarre una base basta utilizzare la riduzione di Gauss già operata: i due pivot erano posizionaati nella colonna $j_1 = 1$ e nella colonna $j_2 = 3$. Una base di $\mathrm{Im} L_A$ è data dunque dai due vettori A^1 e A^3. Osserviamo che $L_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ e

$$\dim \mathrm{Im} L_A = 2 = 5 - 3 = 5 - \dim \ker L_A,$$

come deve essere.

Soluzione esercizio 2. A e B sono le matrici

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$