

**Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.**  
**Prof. P. Piazza**

**Soluzione del compito a casa del 10/11/09**

**Soluzione esercizio 1.** La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Operando con Gauss<sup>1</sup> otteniamo la matrice a scala:

$$S = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

che ha due pivot:

$p_1 = 1$  nella colonna  $j_1 = 1$

$p_2 = 1$  nella colonna  $j_2 = 3$ .

$S$ , e quindi  $A$ , ha rango 2; ne segue che la dimensione di  $U$ , che è per definizione la dimensione di  $\text{Ker}A$ , è uguale a  $5 - 2 = 3$ .

Per rispondere al secondo quesito risolviamo il sistema, trovando quindi una base di  $U (= \text{Ker}A = \text{Ker}S)$ . Le variabili dipendenti nel sistema a scala sono  $x_1$  e  $x_3$ ; quelle libere  $x_2, x_4, x_5$ . Esplicitando rispetto alle variabili dipendenti otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + x_5 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$$

e quindi, ragionando come al solito,

$$U = \text{Span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

I tre vettori trovati sono necessariamente linearmente indipendenti e sono quindi una base di  $U$ . Torniamo alla domanda **1.2**: basterà scegliere  $\ell = 3$  e l'applicazione lineare  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$  definita univocamente dalla legge

$$\underline{e}_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Questa è l'applicazione  $L_C$  con  $C \in M_{5,3}(\mathbb{R})$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

---

<sup>1</sup>(Terza riga  $\rightarrow$  Terza riga - Prima riga); poi (Terza riga  $\rightarrow$  Terza riga - Seconda riga)

Dato che  $\dim \text{Ker} L_C = 3 - \text{rg} C = 3 - 3 = 0$ , ne segue che  $L_C$  è iniettiva. L'applicazione  $L_C$  fornisce quindi una parametrizzazione di  $U$ .

Per scrivere equazioni parametriche di  $U$  basterà considerare la base di  $U$  trovata sopra:  $\underline{x} \in U$  se e solo se  $\underline{x}$  è combinazione lineare di quei tre vettori. Otteniamo

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = s + t + u \\ x_2 = s \\ x_3 = -t \\ x_4 = t \\ x_5 = u \end{cases}$$

e al variare di  $s, t, u \in \mathbb{R}$  otteniamo tutti i vettori di  $U$ . Le (1) sono quindi le equazioni parametriche di  $U$ .

**Soluzione esercizio 2.** Procediamo come spiegato nel libro di testo, Esempio 6.11. Quindi  $\underline{x} \in W$  se e solo se il sistema  $A\underline{v} = \underline{x}$  ha soluzione, con

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Riducendo a scala

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ -1 & 1 & x_3 \\ -1 & -1 & x_4 \\ 0 & -1 & x_5 \end{vmatrix}$$

otteniamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 + x_1 - 2x_2 \\ 0 & 0 & x_4 + x_1 \\ 0 & 0 & x_5 + x_2 \end{vmatrix}$$

Imponendo la compatibilità otteniamo le equazioni cartesiane di  $W$  che sono

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

**Soluzione esercizio 3.** Abbiamo equazioni cartesiane per  $U$  e  $W$ ; è ovvio che  $U \cap W$  coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema ottenuto considerando le equazioni di  $U$  e le equazioni di  $W$ . Conviene chiaramente esprimere  $U$  tramite le sue equazioni ridotte (che sono solo 2). Quindi:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Basterà allora ridurre con Gauss e risolvere come al solito.

**Soluzione esercizio 4.** Procedendo come nell'esercizio 2 scopriamo che il sottospazio  $W = \text{Span}(1, -1, 2)$  ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - 2x_1 = 0 \end{cases}$$

cioè  $B\underline{x} = \underline{0}$  con

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Basta allora applicare la Proposizione 6.4. Le equazioni cartesiane del sottospazio affine sono

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_3 - 2x_1 = 0 \end{cases}$$

**Soluzioni esercizio 5.**

**5.0** L'espressione di  $Q$  in coordinate è

$$Q(\underline{x}) = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ -2x_2 + 5x_3 \end{vmatrix}.$$

**5.1** Si ha

$$\text{Ker}Q = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_3 = 0 \\ -2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}\}$$

e si tratta come al solito di risolvere il sistema e trovare una base per lo spazio delle soluzioni. Si trova un nucleo di dimensione 1 generato dal vettore  $(3, 5, 2)$ . Lo spazio immagine ha dimensione 2, generato ad esempio dalle prime 2 colonne di  $A$  che sono chiaramente non-proporzionali. L'applicazione lineare  $Q$  non è iniettiva, dato che il nucleo è non banale;  $Q$  non è suriettiva, dato che l'immagine ha dimensione 2. Equazioni parametriche di  $\text{Ker}Q$  sono

$$\begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = 5t \\ x_3 = 2t \end{cases}$$

equazioni parametriche per l'immagine sono

$$\begin{cases} x_1 = s - t \\ x_2 = 2s \\ x_3 = -2t \end{cases}$$

Equazioni cartesiane si ottengono dalle basi di  $\text{Ker}Q$  e  $\text{Im}Q$  procedendo come negli esercizi precedenti.

Per determinare la controimmagine di  $(2, -1, 5)$  tramite  $Q$  basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_3 = -1 \\ -2x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

**5.2** Risolvendo il sistema scopriamo che la retta è generata dal vettore  $(1, -2, 1)$ . Questo vettore viene trasformato in  $(4, -1, 1)$  da  $Q$ . L'immagine della retta è il sottospazio generato da  $(4, -1, 1)$ <sup>2</sup>.

**5.3**  $Q(\pi)$  si ottiene fissando una base di  $\pi$  e trasformandola con  $Q$ . Vediamo i

<sup>2</sup>per capire questo punto ragioniamo come segue: sia  $r$  la retta; allora  $Q(r) = \{Q(\underline{v}), \underline{v} \in r\} = \{Q(\alpha(1, -2, 1)), \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha Q(1, -2, 1), \alpha \in \mathbb{R}\} = \text{Span}(Q(1, -2, 1)) = \text{Span}(4, -1, 1)$

dettagli; un base di  $\pi$  è data da  $\{v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 0)\}$ . Si ha allora:

$$Q(\pi) = \{Q(\underline{v}), \underline{v} \in \pi\} = \{Q(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \\ \{\alpha_1 Q(v_1) + \alpha_2 Q(v_2), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \text{Span}(Qv_1, Qv_2) = \text{Span}((2, -1, 5), (-1, 0, 3))$$

Conclusione: l'immagine tramite  $Q$  di  $\pi$  è un piano e più precisamente il piano  $\text{Span}((2, -1, 5), (-1, 0, 3))$ .

**5.4** Una base per  $\sigma$  è data da  $\{\underline{w}_1 = (3, 5, 0), \underline{w}_2 = (0, 0, 1)\}$ ; procedendo come nel punto precedente troviamo che l'immagine di  $\sigma$  tramite  $Q$  è data da

$$\text{Span}(Q\underline{w}_1, Q\underline{w}_2) = \text{Span}(Q(3, 5, 0), Q(0, 0, 1)) = \text{Span}((-2, 6, -10), (1, -3, 5)).$$

In questo caso l'immagine di  $\sigma$  ha dimensione 1 (infatti i due vettori nell'ultimo span sono proporzionali). Conclusione:  $Q(\sigma)$  è la retta generata da  $(1, -3, 5)$ .

Le equazioni parametriche dell'immagine di  $\sigma$  tramite  $Q$  sono ottenute come negli esercizi precedenti.

Per spiegare come sia possibile che l'immagine di  $\pi$  abbia dimensione 2 mentre quella di  $\sigma$  abbia dimensione 1 osserviamo che  $\sigma$  contiene il nucleo di  $Q$  mentre  $\pi$  ha intersezione banale con tale nucleo.