Corso di dottorato a.a. 09-10

Operatori ellittici e topologia

Compito del 10/11/09 (Secondo compito)

Esercizio 1. Sia (E, π_E, X) un fibrato vettoriale e sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento di aperti banalizzanti per E. Rimane allora definito il cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$ delle funzioni di transizione

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$$

Sia ora (F, π_F, X) un secondo fibrato e supponiamo che gli aperti $\{U_\alpha\}$ siano banalizzanti anche per (F, π_F, X). Sia $\{f_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})\}$ il cociclo associato a questo secondo fibrato. In generale diremo che due cocicli $\{k_{\alpha\beta}\}$ e $\{h_{\alpha\beta}\}$ sono equivalenti se $\forall \alpha$ esiste $\lambda_\alpha : U_\alpha \to GL(k, \mathbb{R})$ continuo tale che

$$k_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha h_{\alpha\beta} \lambda_\beta^{-1} .$$

Verificare che (E, π_E, X) è isomorfo a (F, π_F, X) se e solo se i rispettivi cocicli sono equivalenti.

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento. Supponiamo che per ogni coppia $(\alpha, \beta) \in A \times A$ sia assegnata una funzione continua

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$$

e che questa collezione di mappe verifichi le seguenti proprietà:

1) $g_{\alpha\alpha}(m) = \mathrm{Id}_{k\times k}\ \forall m \in U_\alpha$

2) $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$ in $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Sia $\widehat{E}$ l'unione disgiunta dei $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$; introduciamo una relazione d'equivalenza $\mathcal{R}$ in $\widehat{E}$ come segue

$$U_\alpha \times \mathbb{R}^k \ni (x, e) \mathcal{R} (y, f) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k \Leftrightarrow x = y \text{ e } f = g_{\alpha\beta}(x) e$$

Sia E lo spazio quoziente dotato della topologia indotta e sia $\pi : E \to X$ la mappa che associa alla classe d'equivalenza di (x, e) il punto $x \in X$. *Verificare che (E, π, X) è un fibrato vettoriale (continuo) di rango k.*

Esercizio 3. Sia $E \to X$ un fibrato vettoriale di rango k. Verificare che è ben definito il duale di E, E^*. Determinare le funzioni di transizione di E^* a partire da quelle di E.

Esercizio 4. Siano (E, π_E, X) e (F, π_F, X) due fibrati vettoriali. Sia $\phi : E \to F$ un morfismo di fibrati e supponiamo che $\phi|_{E_x}$ sia un isomorfismo per ogni $x \in X$. Verificare che ϕ è allora un isomorfismo di fibrati (e cioè ϕ è anche un diffeomorfismo).

Esercizio 5. Sia E un fibrato reale (rispettiv. complesso) di rango k su M compatta.

5.1. Verificare in dettaglio che esiste sempre una metrica (rispett. metrica hermitiana) su E

5.2. Supponiamo che il gruppo di struttura di E sia riducibile a G, sottogruppo di Lie compatto del gruppo lineare reale (rispett. complesso). Dimostrare che esiste una connessione con matrice di connessione in Lie(G).

5.3. Verificare che per un fibrato reale (risp. complesso) dotato di una metrica (risp. di una metrica hermitiana), il gruppo di struttura è riducibile a $O(k)$ (risp. a $U(k)$). Verificare che una $O(k)$-connessione è semplicemente una connessione compatibile con la metrica. Lo stesso per il caso complesso.

Esercizio 6. Sia $M = S^2$ e sia $\widetilde{\nabla}$ la connessione su TS^2 ottenuta dalla connessione banale su $S^2 \times \mathbb{R}^3$ per proiezione ortogonale dalla decomposizione $TS^2 \oplus N = S^2 \times \mathbb{R}^3 = T(\mathbb{R}^3)|_{S^2}$, con N il fibrato banale (che è banale). Calcolare la 1-forma di connessione di $\widetilde{\nabla}$ sull'aperto U di S^2 per il quale le coordinate sferiche sono una carta locale. Stesso esercizio per la curvatura.