Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Prof. P. Piazza
Soluzione compito a casa del 6/11/09

Soluzione esercizio 1. La matrice dei coefficienti del sistema è

$$S = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{vmatrix}$$

I pivot compaiono nella matrice in grassetto e sono:
$p_1 = 1$ nella colonna $j_1 = 1$
$p_2 = 1$ nella colonna $j_2 = 3$
$p_3 = 1$ nella colonna $j_3 = 5$.
Le variabili dipendenti sono quindi x_1, x_3, x_5. La variabili libere sono x_2, x_4, x_6. Da quanto visto a lezione (Lemma 6.1 e Corollario 6.2) il rango di S è 3 ed una base per ImS è costituita dalle colonne $S^{j_1}, S^{j_2}, S^{j_3}$, cioè dalle colonne S^1, S^3, S^5 .
Risolvendo all'indietro abbiamo

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - 3x_4 + 2x_6 \\ x_3 = 2x_4 + 2x_6 \\ x_5 = x_6 \end{cases}$$

che possiamo riscrivire come

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - 3x_4 + 2x_6 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_4 + 2x_6 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_6 x_6 = x_6 \end{cases}$$

Quindi se Σ_0 denota l'insieme delle soluzioni, e cioè Ker$L_S \equiv$ Ker$S$, si avrà

$$\underline{x} \in \Sigma_0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - 3x_4 + 2x_6 \\ x_2 \\ 2x_4 + 2x_6 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_6 \end{vmatrix} = x_2 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + x_4 \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + x_5 \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Conclusione:

$$\Sigma_0 \equiv \mathrm{Ker} S = \mathrm{Span} \left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \right).$$

Dato che $\dim \mathrm{Ker} S = 6 - \mathrm{rg} S = 6 - 3 = 3$ si ha subito che questi vettori sono una base di Ker$S$ e cioè di Σ_0.

Soluzione esercizio 2. È chiaro che $\Sigma_0 = \mathrm{Ker} A$ con

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Applicando il metodo di Gauss sappiamo che $A\underline{x} = \underline{0}$ è equivalente al sistema $S\underline{x} = \underline{0}$ con

$$S = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

I pivots di questa matrice a scala sono $p_1 = 1$ nella colonna $j_1 = 1$, $p_2 = 1$ nella colonna $j_2 = 2$ e $p_3 = 2$ nella colonna $j_3 = 3$. Da quanto visto a lezione (Lemma 6.1 e Corollario 6.2) il rango di S è 3 ed una base per ImS è costituita dalle colonne $S^{j_1}, S^{j_2}, S^{j_3}$, cioè dalle colonne S^1, S^2, S^3 . Inoltre (Teorema 6.3):

(i) Ker$A$ = Ker$S$ (equivalentemente, il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ è equivalente a $S\underline{x} = \underline{0}$)

(ii) rg$A$ = rg$S$(= 3)

(iii) le colonne $A^{j_1}, A^{j_2}, A^{j_3}$, cioè le colonne A^1, A^2, A^3, costituiscono una base per ImA.

Tornando all'esercizio: Σ_0 = Ker$A$ è ottenuto trovando Ker$S$ che è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} + 2\mathbf{x_3} + x_5 = 0 \\ \mathbf{x_2} + \mathbf{x_3} - \frac{1}{4}x_4 = 0 \\ 2\mathbf{x_3} + \frac{1}{2}x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

con variabili dipendenti $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}$ e variabili libere x_4 e x_5. (Da ora in poi tralasceremo però la notazione in grassetto.) Risolvendo all'indietro il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -x_5 \\ x_2 + x_3 = \frac{1}{4}x_4 \\ 2x_3 = -\frac{1}{2}x_4 - 2x_5 \end{cases}$$

otteniamo (controllate i conti)

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{4}x_4 + x_5 \\ x_3 = -\frac{1}{4}x_4 - x_5 \end{cases}$$

che è ovviamente equivalente a

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{4}x_4 + x_5 \\ x_3 = -\frac{1}{4}x_4 - x_5 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

Quindi

$$\text{Ker}S = \left\{ \begin{vmatrix} \frac{1}{4}x_4 \\ \frac{1}{4}x_4 + x_5 \\ -\frac{1}{4}x_4 - x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{vmatrix} , \quad x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \frac{x_4}{4} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{vmatrix} + x_5 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} , \quad x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

Conclusione:

$$\Sigma_0 = \text{Ker}A = \text{Ker}S = \text{Span}((1, 1, -1, 4, 0), (0, 1, -1, 0, 1))$$

ed è chiaro che questi due vettori sono una base per Σ_0.

Soluzione esercizio 3. Applicando Gauss a

$$A = \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right|$$

otteniamo

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Sia S la matrice 4×5 a sinistra (la stessa dell'esercizio precedente); sia

$$\underline{c} = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)\,.$$

Allora $S\underline{x} = \underline{c}$ è un sistema compatibile (per il Corollario 6.2). Per il teorema 6.3 (i) sappiamo che il nostro sistema non-omogeneo è equivalente al sistema $S\underline{x} = \underline{c}$; ne segue che il nostro sistema è compatibile e le sue soluzioni sono date dalle soluzioni di $S\underline{x} = \underline{c}$. Procedendo come nell'esercizio precedente, ma tenendo conto dei termini noti, otteniamo

$$\Sigma = \underline{v}_0 + \mathrm{Span}((1, 1, -1, 4, 0), (0, 1, -1, 0, 1))$$

con

$$\underline{v}_0 = (\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0)\,.$$

Osservate che abbiamo verificato esplicitamente il Teorema di struttura: Σ è espresso come somma di una soluzione particolare del sistema, $\underline{v}_0$, e di tutte le soluzioni del sistema *omogeneo* associato.

Soluzione esercizio 4. Notiamo innanzitutto che $W = \mathrm{Ker}A$ con $A \in M_{1,5}(\mathbb{R})$, $A = |1\ 0\ -1\ 1\ 1\,|$. Dato che A ha ovviamente rango uguale ad 1, ne segue che W ha dimensione $5 - \mathrm{rg}A = 4$. Per determinare una base di W risolviamo il sistema omogoneo di 1 equazione in 5 incognite che definisce W:
scriviamo quindi $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \,|\, \mathbf{x_1} = x_3 - x_4 - x_5\}$. Variabile dipendente: x_1. Variabili libere x_2, x_3, x_4, x_5. Quindi

$$W = \left\{ \left|\begin{array}{c} x_3 - x_4 - x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\right| , x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

Ne segue, ragionando come al solito, che

$$W = \mathrm{Span}\left(\left|\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right| , \left|\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right| , \left|\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right| , \left|\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right| \right)$$

Dato che W ha dimensione 4 ne segue che necessariamente i quattro vettori dati sono una base di W.

Soluzione esercizio 5. Per ipotesi $n = \dim V$ e $m = \dim W$. La **5.1** è vera, infatti, per il teorema della dimensione $\dim \mathrm{Ker}T = n - \dim \mathrm{Im}T$. Dato che $\mathrm{Im}T \subset W$, si ha $\dim \mathrm{Im}T \leq m$; per ipotesi $n - m > 0$, e quindi $n - \dim \mathrm{Im}T > 0$. Conclusione: $\dim \mathrm{Ker}T > 0$ e T non può essere iniettiva. La **5.2** è anche vera, infatti, sempre per il teorema della dimensione $\dim \mathrm{Im}T = n - \dim \mathrm{Ker}T$. Dato che $\dim \mathrm{Ker}T \geq 0$ si ha che $\dim \mathrm{Im}T \leq n$ ed essendo per ipotesi $n < m$ ne segue che $\dim \mathrm{Im}T < m$ e quindi T non può essere suriettiva.

Soluzione esercizio 6. Siano $\underline{v}_1, \dots \underline{v}_k$ vettori linearmente indipendenti di V. Vogliamo mostrare che i vettori $F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_k)$ sono linearmente indipendenti in W. Per linearità di F si ha

$$\alpha_1 F(\underline{v}_1) + \cdots + \alpha_k F(\underline{v}_k) = 0 \Leftrightarrow F(\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_k \underline{v}_k) = 0$$

ovvero se e solo se $\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_k \underline{v}_k \in \ker F$. Ma F è iniettiva per ipotesi, dunque $\ker F = \{0\}$; ne segue $\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_k \underline{v}_k = 0$. Ma i vettori $\underline{v}_i$ sono linearmente indipendenti per ipotesi, dunque dev'essere $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ come volevamo dimostrare.

Sia ora V_0 un sottospazio di dimensione k di V e sia $W_0 := F(V_0)$ la sua immagine in W. Essendo immagine di un sottospazio mediante un'applicazione *lineare*, W_0 è un sottospazio di W. Dobbiamo solo dimostrare che W_0 ha dimensione k. Poiché V_0 ha dimensione k, esisterà una base $\{\underline{v}_1, \dots \underline{v}_k\}$ di V_0. Questi vettori sono indipendenti in V e dunque, per la prima parte dell'esercizio, i vettori $F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_k)$ sono indipendenti in W. Inoltre $F(\underline{v}_i) \in F(V_0) =: W_0$, dunque i vettori $F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_k)$ sono vettori indipendenti di W_0. Essi sono anche un sistema di generatori per W_0. Infatti se $\underline{w} \in W_0$ allora $\underline{w} = F(\underline{v})$ per qualche $\underline{v} \in V_0$. Poiché $\{\underline{v}_1, \dots \underline{v}_k\}$ è una base di V_0, esistono scalari α_i tali che $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots \alpha_k \underline{v}_k$. Ne segue

$$\underline{w} = F(\underline{v}) = \alpha_1 F(\underline{v}_1) + \cdots \alpha_k F(\underline{v}_k)$$

Abbiamo così dimostrato che $\{F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_k)\}$ è un sistema di generatori indipendenti per W_0, ovvero è una base di W_0; essendo costituita da k elementi, si ha $\dim W_0 = k$.

Osserviamo che abbiamo dimostrato qualcosa di più forte: *un'applicazione lineare iniettiva manda vettori linearmente indipendenti di V in vettori linearmente indipendenti di W* e, analogamente, *un'applicazione lineare iniettiva manda sottospazi k-dimensionali di V in sottospazi k-dimensionali di W*

Soluzione esercizio 7. Determiniamo innanzitutto basi per questi due sottospazi, utilizzando la riduzione a scala. Scopriamo che

$$U = \mathrm{Span}\left(\left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right| \right), \quad V = \mathrm{Span}\left(\left| \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{array} \right| \right).$$

È chiaro che queste due coppie di vettori sono basi rispettivamente per U e V. Vi ricordo che dobbiamo verificare che $U + V = \mathbb{R}^4$ e $U \cap V = \underline{0}$. Avendo determinato basi per U e V notiamo peró che non dobbiamo verificare entrambe le condizioni: infatti, applicando la formula di Grassmann scopriamo che se i 2+2=4 vettori trovati sono linearmente indipendenti, allora, essendo necessariamente una base di $\mathbb{R}^4$, si deve avere $\dim U \cap V = 0$, dato che $\dim U \cap V = \dim U + \dim V - \dim(U + V) = 2 + 2 - 4$. Per verificare se i quattro vettori sono linearmente indipendenti basta mettere i 4 vettori in colonna e ridurre con Gauss. Scopriamo che il rango della relativa matrice

4×4 è proprio 4; ne segue che i 2+2=4 vettori sono linearmente indipendenti e quindi, necessariamente, una base di $\mathbb{R}^4$, come volevasi. Conclusione: $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

Soluzione esercizio 8 Sappiamo che

$$\mathrm{Ker}(L_A) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, L_A(\underline{x}) = \underline{0}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, A\underline{x} = \underline{0}\}\,;$$

basta allora risolvere il sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ trovandone una base. Abbiamo visto molti esercizi di questo tipo: riducendo con Gauss, risolvendo il sistema e "mettendo in evidenza le variabile libere" otteniamo che

$$\mathrm{Ker}(L_A) = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right).$$

Dato che il nucleo è non banale, ne segue che L_A non è iniettiva. Per il teorema della dimensione ne segue che non è suriettiva.
Alternativamente, abbiamo visto che $\mathrm{Im}L_A$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di A; la riduzione di Gauss, già effettuata, ci dice che i primi due vettori colonna di A sono una base per lo spazio generato dalle colonne di A. Dato che $\mathrm{Im}L_A$ non è tutto $\mathbb{R}^3$, essendo di dimensione 2, ne segue L_A non è suriettiva. Quindi L_A non è bigettiva.

Soluzione esercizio 9 . L'applicazione lineare F univocamente determinata da

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

o, equivalentemente,

$$F(1,1) = (1,1,1)\,, \quad F(0,1) = (1,-1,1)$$

è un'applicazione che soddisfa le proprietà richieste. Infatti: è ben definita perché ne diamo i valori su una base di $\mathbb{R}^2$, ha immagine di dimensione 2 dato che i vettori immagine $(1,1,1)$ e $(1,-1,1)$ sono linearmente indipendenti perché non-proporzionali; è quindi iniettiva dato che la dimensione del suo nucleo è $2-2=0$.
Per determinare la sua espressione in coordinate basta utilizzare la linearità:
$F(x_1,x_2) = F(x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2) = x_1F(\underline{e}_1) + x_2F(\underline{e}_2)$, con $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$.
Ma $F(\underline{e}_1) = F(1,0) = F((1,1)-(0,1)) = F(1,1) - F(0,1) = (0,2,0)$, mentre già sappiamo che $F(\underline{e}_2) = F(0,1) = (1,-1,1)$.
Conclusione:

$$F\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 \\ 2x_1 - x_2 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

Una F non iniettiva si otteneva mandando $(1,1)$ in $(1,1,1)$ e mandando $(0,1)$ in un vettore proporzionale a $(1,1,1)$.