Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 6/11/09

Esercizio 1. Si consideri il sistema omogeneo di 3 equazioni in 6 incognite

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_5 - x_6 = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che trattasi di un sistema omogeneo a scala $S\underline{x} = \underline{0}$.
Determinare i pivots della matrice S. Determinare le variabili dipendenti del sistema e quelle libere. Risolvere il sistema. Sia Σ_0 l'insieme delle soluzioni. Spiegare perché Σ_0 è un sottospazio di $\mathbb{R}^6$. Determinare $k \in \mathbb{N}$ e k vettori $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k\}$ in $\mathbb{R}^6$ in modo tale che

$$\Sigma_0 = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k)$$

Determinare una base per Σ_0.
Determinare il rango di S. Determinare una base per $\mathrm{Im}S$.

Si consideri ora il sistema non-omogeneo di 3 equazioni in 6 incognite

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_5 - x_6 = 2 \end{cases}$$

Osserviamo che trattasi di un sistema a scala $S\underline{x} = \underline{c}$. Sia Σ l'insieme delle soluzioni.
Determinare $k \in \mathbb{N}$ e $k+1$ vettori $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k, \underline{v}_0\}$ in $\mathbb{R}^6$ in modo tale che

$$\Sigma = \underline{v}_0 + \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k)$$

Confrontare Σ e Σ_0.

Esercizio 2. Si consideri il sistema *omogeneo* di 4 equazioni in 5 incognite

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Sia Σ_0 l'insieme delle soluzioni. Esprimere Σ_0 come nucleo di un'applicazione lineare L_A.
Applicare il metodo di Gauss e determinare un sistema omogeneo *a scala*, $S\underline{x} = \underline{0}$, equivalente al sistema dato.
Determinare $k \in \mathbb{N}$ e k vettori in $\mathbb{R}^5$ in modo tale che $\Sigma_0 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$. Determinare una base di Σ_0.

Esercizio 3. Si consideri il sistema non-omogeneo di 4 equazioni in 5 incognite (ottenuto dal sistema omogeneo dell'esercizio precedente)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 - x_3 - x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_5 = 1 \end{cases}$$

3.0 Applicare il metodo di Gauss e determinare un sistema *a scala*, $S\underline{x} = \underline{c}$, equivalente al sistema dato.
3.1 Verificare che il sistema a scala $S\underline{x} = \underline{c}$ è compatibile. (Otteniamo quindi la compatibiltà del sistema iniziale.)

3.2 Sia Σ l'insieme delle soluzioni del sistema iniziale. Scrivere Σ nella forma

$$\Sigma = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_\ell) + \underline{v}_0$$

per un opportuno $\ell \in \mathbb{N}$ e per opportuni vettori $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_\ell, \underline{v}_0$ in $\mathbb{R}^5$. (*Suggerimento*: utilizzare l'esercizio precedente ....)

Esercizio 4. Determinare una base per il sottospazio di $\mathbb{R}^5$:

$$W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$$

Esercizio 5. Siano V e W due spazi vettoriali e $T : V \to W$ un'applicazione lineare. Sia $n = \dim V$ e $m = \dim W$.

5.1 Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:
se $n > m$ l'applicazione lineare T non può essere iniettiva.

5.2. Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:
se $n < m$ l'applicazione lineare T non può essere suriettiva.

Giustificate la vostra risposta.

Esercizio 6. Siano V e W due spazi vettoriali e sia $F : V \to W$ un isomorfismo. Verificare che F trasforma vettori linearmente indipendenti di V in vettori linearmente indipendenti di W. Dedurne che F trasforma sottospazi di dimensione k di V in sottospazi di dimensione k di W.

Esercizio 7. Siano $U, V \subset \mathbb{R}^4$ i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dati da

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \right), \quad V = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} \right).$$

Determinare basi di U e di V. Determinare una base per $U + V$. Stabilire se $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di U e V, cioè se $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

Esercizio 8. Sia $A \in M_{34}(\mathbb{R})$ la matrice data da

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

e sia $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare ad essa associata. Determinare una base per $\mathrm{Ker}(L_A)$ ed una base per $\mathrm{Im}(L_A)$. Studiare iniettività e suriettività di L_A. Dire se L_A è bigettiva.

Esercizio 9 . Determinare l'espressione in coordinate di un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che trasformi il vettore $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ nel vettore $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ ed abbia nucleo banale (quindi *iniettiva*). (*Suggerimento*: definite F selezionando una base opportuna di $\mathbb{R}^2$ e 2 vettori opportuni di $\mathbb{R}^3$. Per l'espressione in coordinate, utilizzate la linerità ....) Rifate questo esercizio imponendo sempre che F trasformi $(1, 1)$ in $(1, 1, 1)$ ma richiedendo ora che il nucleo sia non banale. Fate delle figure che illustrino le vostre costruzioni.