

Soluzione esercizio 1. Diamo la soluzione più breve. Sappiamo che se $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ allora $n = \dim \text{Ker} A + \text{rg} A$, dove il nucleo di A ,

$$\text{Ker} A \equiv \text{Ker} L_A = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid L_A \underline{x} = \underline{0} \},$$

altri non è che il sottospazio di \mathbb{R}^n costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$. Questo vuol dire che $\dim \text{Ker} A = n - \text{rg} A$. In parole, la dimensione del sottospazio di \mathbb{R}^n costituito dalle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ è data dal numero delle incognite meno il rango della matrice dei coefficienti del sistema.

Nel nostro caso U è l'insieme delle soluzioni di un sistema di **1** equazione in **3** incognite: $U = \text{Ker} A$ con $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \in M_{13}(\mathbb{R})$. Ma allora $\dim U = 3 - \text{rg} A$. Dato che ovviamente $\text{rg} A = 1$ ¹ si ha $\dim U = 3 - 1 = 2$. Conclusione: $\dim U = 2$. Analogamente $\dim W = 2$. Ma allora, per Grassmann,

$$\dim(U \cap W) = 2 + 2 - \dim(U + W) = 4 - \dim(U + W).$$

Ora, $U + W$ è un sottospazio di \mathbb{R}^3 ed ha quindi dimensione ≤ 3 . Ma allora $\dim(U \cap W) \geq 1$. In ogni caso $(U \cap W) \neq \underline{0}$ e \mathbb{R}^3 non è somma diretta.

Osservazione 1. Ovviamente avremmo potuto calcolare l'intersezione di U e di W che è costituita dai vettori \underline{x} di \mathbb{R}^3 che soddisfano sia $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ che $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$; $U \cap W$ è quindi uguale al sottospazio delle soluzioni del sistema

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Avremmo potuto risolvere esplicitamente il sistema ed avremmo trovato che $U \cap W = \text{Span}((1, -2, 3))$.

In generale se U è un sottospazio di \mathbb{R}^n dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ e se W è un secondo sottospazio di \mathbb{R}^n dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $B\underline{x} = \underline{0}$, allora $U \cap W$, che sappiamo essere un sottospazio, è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $C\underline{x} = \underline{0}$ con $C = \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$.

Osservazione 2. Notiamo anche che senza risolvere il sistema, ma osservando che $U \cap W$ è dato dalle soluzioni di (1), avremmo potuto subito concludere che $\dim(U \cap W) = 1$. Infatti:

$$\dim(U \cap W) = 3 - \text{rg} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ma la matrice A in questa formula ha rango 2 (infatti $\text{rg} A \leq \min\{2, 3\} = 2$ e le prime due colonne sono linearmente indipendenti perché non-proporzionali, quindi $\text{rg} A = 2$). Conclusione: $\dim(U \cap W) = 3 - 2 = 1$.

Soluzione esercizio 2. Sappiamo che U ha dimensione 2. È ovvio che W ha dimensione 1. Inoltre $W = \{(\alpha, \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$. Ma allora è subito visto che $U \cap W = \{\underline{0}\}$. Ne segue che $\dim(U \cap W) = 0$. Ma allora, per Grassmann, $\dim(U + W) = 2 + 1 - 0 = 3$. Ne segue che $U + W \subset \mathbb{R}^3$ e $\dim(U + W) = 3$; ma allora $U + W = \mathbb{R}^3$. Conclusione: in questo caso $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ perché $U + W = \mathbb{R}^3$ e $U \cap W = \{\underline{0}\}$.

¹perché $\text{rg} A = \max$ numero di colonne lin. indep. = \max numero di righe lin. indep.

Soluzione esercizio 3. L_A è iniettiva se e solo se $\text{Ker}L_A = \{\underline{0}\}$. Occorre allora calcolare

$$\text{Ker}L_A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid L_A \underline{x} = \underline{0}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}\}$$

Utilizzando Gauss è facile vedere che $\text{Ker}L_A = \{\underline{0}\}$. Ne segue che L_A è iniettiva. Per il teorema della dimensione (andiamo da \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^3) è anche suriettiva. Ne segue che L_A è biettiva. L'immagine di $(1, 2, 1)$ è data sostituendo nella definizione di L_A ,

$$L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 \end{vmatrix},$$

i valori 1, 2 e 1 al posto di x_1, x_2 e x_3 rispettivamente. Otteniamo il vettore $(6, 3, 0)$. L'immagine del j -mo vettore della base canonica è la j -ma colonna della matrice A .

Soluzione esercizio 4.

$$L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ -2x_2 + 5x_3 \end{vmatrix}$$

Per determinare la dimensione del nucleo troviamo prima una base per lo spazio immagine (in ogni caso questo è un quesito al quale dobbiamo rispondere), cioè per lo spazio generato dalle colonne di A . Il numero di elementi in questa base è per definizione la dimensione di $\text{Im}L_A$ e si ha $\dim \text{Ker}A = 3 - \dim \text{Im}L_A \equiv 3 - \text{rg}A$. Ora, le prime due colonne sono ovviamente linearmente indipendenti. Dobbiamo quindi decidere se tutte e tre le colonne sono o meno linearmente indipendenti. Questo lo sappiamo fare; si scopre che non lo sono. Ne segue che una base di $\text{Im}L_A$ è costituita dalle prime due colonne. In particolare $\dim \text{Im}L_A = 2$ e $\dim \text{Ker}L_A = 3 - 2 = 1$.

Soluzione esercizio 5. Basta verificare che i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \underline{v}_2 = (0, 1, 1), \quad \underline{v}_3 = (0, 1, -1)$$

sono una base di \mathbb{R}^3 perché allora possiamo applicare la Proposizione 5.2 del libro di Abate-de Fabritiis. Si verifica con il solito metodo già visto varie volte che i tre vettori sono linearmente indipendenti. Sono quindi una base in \mathbb{R}^3 .

Per determinare $F(1, 0, 0)$, $F(0, 1, 0)$, $F(0, 0, 1)$ dobbiamo esprimere i vettori $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ in funzione di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ e \underline{v}_3 e poi applicare la linearità. Si ha $(1, 0, 0) = \underline{v}_1 - \underline{v}_2$, $(0, 1, 0) = \frac{1}{2}(\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$, $(0, 0, 1) = \frac{1}{2}(\underline{v}_2 - \underline{v}_3)$ e quindi

$$F(1, 0, 0) = F(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = F(\underline{v}_1) - F(\underline{v}_2) = (2, 3, 2) - (1, 3, 2) = (1, 0, 0)$$

$$F(0, 1, 0) = F\left(\frac{1}{2}(\underline{v}_2 + \underline{v}_3)\right) = \frac{1}{2}((1, 3, 2) + (1, 1, -2)) = (1, 2, 0)$$

$$F(0, 0, 1) = F\left(\frac{1}{2}(\underline{v}_2 - \underline{v}_3)\right) = \frac{1}{2}((1, 3, 2) - (1, 1, -2)) = (0, 1, 2)$$

SOLUZIONE ULTERIORI ESERCIZI

Soluzione esercizio 6. W ha dimensione $5 - 1 = 4$. Sia \underline{u} un vettore di \mathbb{R}^5 non appartenente a W ; basta prendere un vettore che non soddisfa l'equazione che definisce W , ad esempio $\underline{u} = (1, 1, 1, 1, 1)$. Allora $\text{Span}(\underline{u}) = \{(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$ ha dimensione 1 ed ha intersezione banale con W : $U \cap W = \{\underline{0}\}$. Per Grassmann $\dim(U + W) = 4 + 1 - 0 = 5$; ma allora $U + W = \mathbb{R}^5$. Conclusione $\mathbb{R}^5 = W \oplus U$. Se scegliamo $U' = \text{Span}(\underline{u}')$ con $\underline{u}' \notin W$ e $\underline{u}' \neq \underline{u}$ allora $\mathbb{R}^5 = W \oplus U'$ ma $U \neq U'$.

Soluzione esercizio 7. È chiaro che $\text{rg}A = B = 2$; quindi $\dim U = \dim W = 4 - 2 = 2$. L'intersezione ha dimensione $4 - \text{rg}C$ con C uguale alla matrice 4×4 ottenuta considerando $\begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$. Applicando Gauss vediamo che C è non-singolare e quindi $\text{rg}C = 4$. Ne segue che $U \cap W = \{\underline{0}\}$; per Grassmann $\dim(U + W) = 4$. Ne segue che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Soluzione esercizio 8. Siano A e B due matrici simmetriche e λ un numero reale. Abbiamo già visto che l'insieme delle matrici simmetriche e quello delle matrici antisimmetriche sono un sottospazio.

È bene osservare che A è simmetrica se e solo se coincide con la sua trasposta: $A = A^T$. Analogamente: A è antisimmetrica se e solo se $A = -A^T$.

È chiaro che se a_{ij} è simultaneamente uguale a a_{ji} ed a $(-a_{ji})$, allora deve essere $a_{ij} = 0$. Da questa osservazione segue subito che $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R}) = \underline{0}$. D'altra parte, se $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ allora

$$A = \frac{(A + A^T)}{2} + \frac{(A - A^T)}{2}$$

e dato che il primo addendo a destra appartiene a $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})$ ² ed il secondo appartiene a $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$ abbiamo dimostrato che $M_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$.

Per quanto riguarda le dimensioni, osserviamo che in generale vale $\dim \mathcal{S}_{nn} = n(n+1)/2$ e $\dim \mathcal{A}_{nn} = n(n-1)/2$.

²infatti $((A + A^T)/2)^T = (A^T + (A^T)^T)/2 = (A + A^T)/2$ (dove abbiamo utilizzato il fatto, ovvio, che $(A^T)^T = A$)