Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 29/10/09

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Consideriamo i sottospazi

$$U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}\,, \quad W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Decidere se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Esercizio 2. Come l'esercizio 1 ma con $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ e $W = \mathrm{Span}((1,1,1))$.

Esercizio 3. Dire se l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

è iniettiva. Dire se è surgettiva. Giustificare. Determinare l'immagine tramite L_A del vettore $(1,2,1)$. Determinare l'immagine tramite L_A dei vettori della base canonica.

Esercizio 4. Sia $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Scrivere l'espressione di L_A in coordinate: $L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \dots$

Determinare la dimensione del nucleo di L_A. Determinare una base per lo spazio immagine.

Esercizio 5. Spiegare perché esiste ed è unica l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(1,1,1) = (2,3,2), \quad F(0,1,1) = (1,3,2), \quad F(0,1,-1) = (1,1,-2).$$

(Per ragioni tipografiche scriveremo spesso i vettori di $\mathbb{R}^n$ per righe.) Determinare l'immagine tramite F degli elementi della base canonica: $\underline{e}_1 = (1,0,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1,0)$, $\underline{e}_3 = (0,0,1)$. (*Suggerimento*: esprimere i vettori della base canonica come combinazioni lineari dei vettori $(1,1,1)$, $(0,1,1)$, $(0,1,-1)$ e applicare la linearità.)

ULTERIORI ESERCIZI

Esercizio 6. Sia $W \subset \mathbb{R}^5$ il sottospazio $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_1 + x_3 + x_5 = 0\}$. Determinare un sottospazio U di $\mathbb{R}^5$ tale che $W \oplus U = \mathbb{R}^5$. (Determinare U vuol dire qui dare U tramite una sua base.) Determinare un secondo sottospazio U' distinto da U ma tale che sia ancora $\mathbb{R}^5 = W \oplus U'$.
Suggerimenti: qual è la dimensione di W ? Che dimensione ci aspettiamo per U?

Esercizio 7. In $\mathbb{R}^4$ sono dati $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, A\underline{x} = \underline{0}\}$, $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, B\underline{x} = \underline{0}\}$ con $A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Verificare se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Esercizio 8. V ricordo che una matrice $A = (a_{ij}) \in M_{nn}(\mathbb{R})$ è detta *simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j; una matrice A è detta *antisimmetrica* se $a_{ij} = -a_{ji}$

per ogni i, j. Sappiamo che che il sottoinsieme $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche è un sottospazio e che il sottoinsieme $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche è anche un sottospazio.

Verificare che $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R}) = \underline{0}$; verificare che $M_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$ (suggerimento: utilizzare il fatto che $A = (A + A^T)/2 + (A - A^T)/2)$). Dedurne che $M_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$