Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Prof. P. Piazza
Soluzione compito a casa del 24/10/09

Soluzione esercizio 1. Siano A e B due matrici simmetriche e λ un numero reale. Dobbiamo mostrare che anche $A+B$ e λA sono matrici antisimmetriche. Si ha

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = (A+B)_{ji}$$
$$(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} = \lambda \cdot a_{ji} = (\lambda A)_{ji}$$

dunque $A+B, \lambda A \in \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})$.

La dimostrazione per lo spazio delle matrici antisimmetriche è perfettamente analoga: se A e B sono due matrici anti simmetriche e λ un numero reale, allora

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = -a_{ji} - b_{ji} = -(A+B)_{ji}$$
$$(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} = -\lambda \cdot a_{ji} = -(\lambda A)_{ji}$$

dunque $A+B, \lambda A \in \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$.

Una base di $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ è data dalle 6 matrici

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Una base di di $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$ è invece data dalle 3 matrici

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

Notiamo che queste 9 matrici tutte insieme formano una base di $M_{33}(\mathbb{R})$. In particolare, $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})+\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R}) = M_{33}(\mathbb{R})$. Dato che poi si ha anche (facile) $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})\cap\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R}) = \underline{0}$ concludiamo che

$$\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_{33}(\mathbb{R}) = M_{33}(\mathbb{R}).$$

Questo riflette un fatto più generale: ogni matrice di $M_{nn}(\mathbb{R})$ si può scrivere in un unico modo come somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica (dimostrarlo). Per quanto riguarda le dimensioni, osserviamo che in generale vale $\dim \mathcal{S}_{nn} = n(n+1)/2$ e $\dim \mathcal{A}_{nn} = n(n-1)/2$.

Soluzione esercizio 2. Il sottoinsieme W è un sottospazio di $\mathbb{R}_3[x]$. Infatti, presi $p(x), q(x)$ in W e $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha

$$(p+q)(1) = p(1) + q(1) = 0$$
$$(\lambda p)(1) = \lambda \cdot p(1) = 0$$

dunque $p(x) + q(x) \in W$ e $\lambda p(x) \in W$. Il sottoinsieme U, invece, non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[x]$. Ad esempio il polinomio zero non appartiane ad U.

Soluzione esercizio 3. Il polinomio $q(x)$ non appartiene a $\mathrm{Span}(p)$. Infatti se $q(\in \mathrm{Span}(p)$, si avrebbe $q(x) = \lambda p(x)$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$, ovvero

$$x^2 + 5x^4 = \lambda(1 + x + x^2 + 5x^4)$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Ma l'equazione scritta sopra è equivalente a

$$\lambda + \lambda x + (\lambda - 1)x^2 + 5(\lambda - 1)x^4 = 0$$

ovvero[1] al sistema

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 0 \\ \lambda - 1 = 0 \\ 5\lambda - 5 = 0 \end{cases}$$

che evidentemente non ha alcuna soluzione.

Soluzione esercizio. 4. Sappiamo che ogni numero complesso si può scrivere come $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Vale a dire $\{1, i\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Inoltre 1 ed i sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$ in quanto $x + iy = 0$ se e solo se $x = y = 0$. Dunque $\{1, i\}$ è un sistema di generatori indipendenti, ovvero una base. Avendo una base formata da due vettori, $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ ha dimensione due.

Soluzione esercizio 5. Consideriamo l'equazione

$$\alpha_1(c_1\underline{v}_1) + \alpha_2(c_2\underline{v}_2) + \cdots + \alpha_k(c_k\underline{v}_k) = 0$$

La si può riscrivere come

$$(\alpha_1 c_1)\underline{v}_1 + (\alpha_2 c_2)\underline{v}_2) + \cdots + (\alpha_k c_k)\underline{v}_k = 0$$

Poiché i vettori $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ sono linearmente indipendenti, l'unica soluzione di quest'ultima equazione è

$$\alpha_1 c_1 = \alpha_2 c_2 = \cdots = \alpha_k c_k = 0$$

Ma $c_1, \ldots, c_k \neq 0$ e dunque deve essere

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0,$$

ovvero, i vettori $c_1\underline{v}_1, \ldots, c_k\underline{v}_k$ sono linearmente indipendenti.

Soluzione esercizio 6. Si tratta di 3 vettori in $\mathbb{R}^3$. per mostrare che sono una base basta mostrare che sono linearmente indipendenti. L'equazione

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 = 0$$

è equivalemte al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

La matrice associata al sistema è

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

[1] Quella scritta sopra è un'identità di polinomi e non un'equazione nella variabile x. Stiamo cioè chiedendo che il polinomio $\lambda + \lambda x + (\lambda - 1)x^2 + 5(\lambda - 1)x^4$ sia *identicamente* nullo, e non quali siano i valori di x che lo annullano.

Osserviamo che avremmo potuto scrivere la matrice del sistema direttamente dai vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$. Applichiamo l'algoritmo di eliminazione gaussiana alla matrice del sistema:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 \end{array}\right|$$

Tutti i pivot sono diversi da zero. la matrice del sistema è pertanto non singolare, ed il sistema ammette un' unica soluzione. Trattandosi di un sistema omogeneo, quest'unica soluzione deve essere la soluzione banale.

Determinare le coordinate del vettore $\underline{e}_2$ nella base $\underline{v}_1, \underline{v}_2\underline{v}_3$ significa determinare i tre numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ per i quali risulta

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 = \underline{e}_2$$

Arriviamo così al sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

La matrice associata al sistema è

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Osserviamo che anche in questo caso avremmo potuto scrivere la matrice del sistema direttamente dai vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ ed $\underline{e}_2$. Applicando l'algoritmo di eliminazione gaussiana alla matrice del sistema troviamo:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 3/5 & -7/5 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -7/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 \end{array}\right|$$

Le coordinate di $\underline{e}_2$ nella base $\underline{v}_1, \underline{v}_2\underline{v}_3$ sono pertanto $(-1/3, -2/3, -7/3)$; vale a dire

$$\underline{e}_2 = -\frac{1}{3}\underline{v}_1 - \frac{2}{3}\underline{v}_2 - \frac{7}{3}\underline{v}_3$$

Soluzione esercizio 7. La prima affermazione è falsa. Per dimostrarlo dobbiamo mostrare che in $\mathbb{R}^6$ è possibile trovare quattro vettori linearmente indipendenti. Un modo è il seguente: sappiamo che $\mathbb{R}^6$ ha dimensione 6. Una sua base $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4, \underline{b}_5, \underline{b}_6\}$ è costituita da 6 vettori linearmente indipendenti tra loro. Ma allora, in particolare i 4 vettori $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4\}$ sono linearmente indipendenti.

La seconda affermazione è vera. Se avessimo in $\mathbb{R}^4$ sei vettori linearmente indipendenti, allora la dimensione di $\mathbb{R}^4$ sarebbe almeno 6, ma sappiamo che la dimensione di $\mathbb{R}^4$ è uguale a 4.

Infine, l'ultima affermazione è falsa. Per fornire un controesempio basta prendere tre vettori a piacere in $\mathbb{R}^6$ e scegliere come quarto vettore una combinazione lineare dei primi tre. E' bene osservare che per produrre questo controesempio abbiamo dovuto scegliere il quarto vettore in modo particolare: in effetti quattro vettori "generici" di $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente indipendenti. Su cosa debba intendersi precisamente con "generici" torneremo più avanti nel corso. Per ora ci accontentiamo di dire (senza specificarne meglio il significato) che quattro vettori linearmente dipendenti in $\mathbb{R}^6$ costituiscono una situazione "speciale".

Soluzione esercizio 8. Seguiamo il suggerimento e dimostriamo che i due numeri reali 1 e $\sqrt{2}$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$, ovvero che l'equazione $x\cdot 1+y\cdot\sqrt{2}=0$ con $x,y\in\mathbb{Q}$ ha solamente la soluzione banale $(x,y)=(0,0)$. Analizziamo separatamente le due possibilità $y=0$ e $y\neq 0$. Se $y=0$, l'equazione $x+y\sqrt{2}=0$ si riduce a $x=0$ ovvero la soluzione è $(x,y)=(0,0)$. Se invece $y\neq 0$, da $x+y\sqrt{2}=0$ ricaviamo $\sqrt{2}=-x/y\in\mathbb{Q}$, ovvero che $\sqrt{2}$ è un numero razionale. Ma questo è assurdo e rimaniamo con la solita possibilità $y=0$ e dunque con la sola soluzione $(x,y)=(0,0)$. Abbiamo così provato che in $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ ci sono almeno due vettori linearmente indipendenti, il che implica $\dim\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}\geq 2$. Si può poi dimostrare (ma non abbiamo gli strumenti per farlo) che in $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ ci sono infiniti vettori linearmente indipendenti: $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ è un esempio di spazio vettoriale di dimensione infinita.

Esercizio 9. Introduciamo un'utile notazione: se un sottoinsieme $W\subset V$ è un sottospazio vettoriale di V, scriviamo $W\leq V$.
Verifichiamo che i vettori $\underline{v}_1,\underline{v}_2\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti: l'equazione $\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\alpha_3\underline{v}_3=0$ scritta per esteso è

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3,0)=(0,0,0,0)$$

ed ha evidentemente la sola soluzione $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,0)$. Determiniamo ora una base per i sottospazi W_1,W_2 e W_3. Osserviamo che tutti i generatori di W_1 sono combinazioni lineari di $\underline{v}_1,\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$, dunque $W_1\leq\mathrm{Span}(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3)$. D'altronde i vettori $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3$ appartengono a W_1 e dunque $\mathrm{Span}(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3)\leq W_1$. Ne segue $W_1=\mathrm{Span}(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3)$. Poiché i tre vettori $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti, essi sono una base per il sotttospazio che generano, e dunque una base di W_1 è $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\}$. Con ragionamento perfettamente analogo si prova che $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2\}$ è una base di W_2. Infine, per quanto riguarda W_3 osserviamo che tutti i generatori di W_3 sono combinazioni lineari di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ e dunque $W_3\leq\mathrm{Span}(\underline{v}_1,\underline{v}_2)$. I due vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti perché non-proporzionali: quindi sono una base per $\mathrm{Span}(\underline{v}_1,\underline{v}_2)$ che pertanto ha dimensione 2. Questo ci dice che $\dim W_3\leq 2$; pertanto in W_3 possiamo trovare al più 2 vettori linearmente indipendenti e, inoltre, se troviamo 2 vettori indipendenti in W_3 questi sono una base. Si verifica facilmente che $\underline{v}_1+\underline{v}_2$ e $\underline{v}_1-\underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti, per cui $\{\underline{v}_1+\underline{v}_2,\underline{v}_1-\underline{v}_2\}$ è una base di W_3. Osserviamo che W_3 viene ad essere un sottospazio bidimensionale di $\mathrm{Span}(\underline{v}_1,\underline{v}_2)$, che ha dimensione 2. Ne segue $W_3=\mathrm{Span}(\underline{v}_1,\underline{v}_2)$. Questo fatto può essere dimostrato direttamente, mostrando che $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in W_3$. Infatti si ha

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{2}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \frac{1}{2}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$$
$$\underline{v}_2 = \frac{1}{2}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) - \frac{1}{2}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$$