Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 24/10/09

Esercizio 1. Una matrice $A = (a_{ij}) \in M_{nn}(\mathbb{R})$ è detta *simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j. Una matrice A è detta *antisimmetrica* se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni i, j.
1.1. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche è un sottospazio.
1.2. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche è un sottospazio.
1.3 Nel caso $n = 3$ determinare una base del sottospazio $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ e una base del sottospazio $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a tre. Si consideri il sottoinsieme

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) = 0\}$$

Stabilire se W è un sottospazio. Stesso esercizio per

$$U = \{q(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid q(2) = 4\}.$$

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}[x]$ e sia $p(x) = 1 + x + x^2 + 5x^4$. Consideriamo $q(x) = x^2 + 5x^4$. Stabilire se $q(x) \in \mathrm{Span}(p)$.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale che ha come insieme di vettori i numeri complessi e come campo degli scalari i numeri reali. Verificare che la dimensione di $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ è uguale a due. (Suggerimento: considerare i vettori 1 e i...).

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale e $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ vettori linearmente indipendenti. Verificare che se $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, $c_j \neq 0\ \forall j$, allora i vettori

$$c_1\underline{v}_1, \ldots, c_k\underline{v}_k$$

sono anche linearmente indipendenti.

Esercizio 6. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Verificare che questi 3 vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare le coordinate del vettore $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$ in questa nuova base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 7. Vero o Falso :
- 4 vettori in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente dipendenti
- 6 vettori in $\mathbb{R}^4$ sono sempre linearmente dipendenti.
- 4 vettori in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente indipendenti

Giustificare le risposte.

Esercizio 8. Sia $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ lo spazio vettoriale che ha come insieme di vettori i numeri reali $\mathbb{R}$ e come campo di scalari i numeri razionali $\mathbb{Q}$. Le operazioni sono indotte dalle usuali operazioni sui reali. Dimostrare che $\dim \mathbb{R}_{\mathbb{Q}} \geq 2$. (Suggerimento: dimostrare che i vettori $\underline{v}_1 = 1$ e $\underline{v}_2 = \sqrt{2}$ sono linearmente indipendenti...).

Esercizio 9. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 0, 1, 0)\,,\ \underline{v}_2 = (0, 1, 0, 0)\,,\ \underline{v}_3 = (0, 0, 1, 0).$$

Si può verificare che questi 3 vettori sono linearmente indipendenti.
Determinare una base per i seguenti sottospazi:

$W_1 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 74\underline{v}_2 - \sqrt{2}\underline{v}_3)$

$W_2 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$

$W_3 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 2\underline{v}_2, \underline{v}_1 - 2\underline{v}_2)$