Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Prof. P. Piazza
Soluzioni compito a casa del 21/10/09

Soluzione esercizio 1. La matrice combinazione lineare richiesta è

$$A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Soluzione esercizio 2. Dobbiamo stabilire se l'equazione $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \underline{0}$, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ammetta o meno soluzioni non banali [1]. La combinazione lineare $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$ esplicitamente è

$$\alpha_1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 & 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{vmatrix}$$

pertanto l'equazione $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \underline{0}$ diventa

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 & 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ovvero è equivalente al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

E' immediato osservare che questo sistema ammette la sola soluzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$.

In definitiva abbiamo verificato che

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \underline{0} \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$$

e quindi le tre matrici A_1, A_2, A_3 sono linearmente indipendenti.

Soluzione esercizio 3. Il sottoinsieme W_1 non è un sottospazio di V. Ad esempio,[2] il vettore $(1, 1, 2)$ appartiene a W_1, ma il suo opposto, ovvero il vettore $(-1, -1, -2)$ non appartiene a W_1.

Il sottoinsieme W_2 non è un sottospazio di V. Ad esempio il vettore $(1, 2, 2)$ appartiene a W_2, ma il suo doppio $2 \cdot (1, 2, 2) = (2, 4, 4)$ non appartiene a W_2.

Il sottoinsieme W_3 non è un sottospazio di V. Ad esempio il vettore nullo $(0, 0, 0)$ non appartiene a W_3.

---

[1] ragionare sulla definizione stessa di dipendenza lineare; notare che a destra c'è la matrice nulla

[2] Se un sottoinsieme $W \subseteq V$ non è un sottospazio, ci sono in generale molti modi di dimostrarlo. Quelli proposti qui sono solamente degli esempi: ce ne sono molti altri altrettanto validi.

Il sottoinsieme W_4 è l'insieme delle soluzioni di un sistema non omogeneo. Come tale non è un sottospazio di V. Ad esempio il vettore nullo $(0,0,0)$ non appartiene a W_4.

Il sottoinsieme W_5 è l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo. Come tale è un sottospazio di V.

Soluzione esercizio 4. Le operazioni $\{+,\cdot\}$ definite nel testo dell'esercizio non dotano $\mathbb{R}^2$ di una struttura di spazio vettoriale. Forse il modo più semplice di vederlo (ce ne sono ovviamente altri) è osservare che $1\cdot(x,y)=(x,-y)$ e dunque, in generale

$$1\cdot(x,y)\neq(x,y)$$

Non è dunque verificato l'assioma $1\cdot\underline{v}=\underline{v}$, $\forall\underline{v}\in V$.

Soluzione esercizio 5. La matrice associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & s & 1 & 1 \\ 1 & -1 & s & -2 \\ 4 & -3 & -1 & t \end{array}\right)$$

Per ritardare il più possibile l'apparizione del parametro s sui pivot, scambiamo la prima e la terza riga:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -1 & t \\ 1 & -1 & s & -2 \\ 3 & s & 1 & 1 \end{array}\right)$$

A questo punto procediamo con l'usuale eliminzazione gaussiana:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -1 & t \\ 1 & -1 & s & -2 \\ 3 & s & 1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/4 & -1/4 & t/4 \\ 1 & -1 & s & -2 \\ 3 & s & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/4 & -1/4 & t/4 \\ 0 & -1/4 & s+1/4 & -2-t/4 \\ 0 & s+9/4 & 7/4 & 1-3t/4 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/4 & -1/4 & t/4 \\ 0 & 1 & -(4s+1) & 8+t \\ 0 & 4s+9 & 7 & 4-3t \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/4 & -1/4 & t/4 \\ 0 & 1 & -(4s+1) & 8+t \\ 0 & 0 & 7+(4s+9)(4s+1) & 4-3t-(8+t)(4s+9) \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/4 & -1/4 & t/4 \\ 0 & 1 & -(4s+1) & 8+t \\ 0 & 0 & 2s^2+5s+2 & -\frac{1}{4}(st+3t+8s+17) \end{array}\right)$$

Notiamo che l'ultimo pivot dipende da s. Il sistema avrà un comportamento diverso a seconda se quest'ultimo pivot sia diverso o uguale a zero. Risolvendo l'equazione

$$2s^2+5s+2=0$$

troviamo

$$s_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{-5\pm 3}{4}=\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}$$

Dunque, per $s\neq -2, 1/2$ tutti i pivot sono diversi da zero e il sistema ha un unica soluzione per ogni valore di t. Restano da esaminare i due casi speciali $s=-2$ ed $s=-1/2$. Per $s=-2$ la matrice del sistema diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/4 & -1/4 & t/4 \\ 0 & 1 & 7 & 8+t \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(t+1) \end{array}\right)$$

Ne segue che per $t \neq -1$ il sistema è incompatibile, non ammette cioè alcuna soluzione. Per $t = -1$ la matrice del sistema diventa invece

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

L'ultima riga corrisponde all'identità $0 = 0$. Quest'identità è verificata per ogni valore di x, y, z quindi l'ultima equazione del sistema non porta con se alcuna informazione.

Se poniamo $z = \lambda$ e trattiamo le variabili z come parametri, portandole dall'altra parte dell'uguale, la matrice del sistema si riscrive come

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3/4 & -1/4 + \lambda/4 \\ 0 & 1 & 7 - 7\lambda \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 - 5\lambda \\ 0 & 1 & 7 - 7\lambda \end{array}\right)$$

ovvero

$$\begin{cases} x = 5 - 5\lambda \\ y = 7 - 7\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Il caso $s = -1/2$ si analizza in modo del tutto simile: la matrice del sistema diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/4 & -1/4 & t/4 \\ 0 & 1 & 1 & 8 + t \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8}(5t + 26) \end{array}\right)$$

Pertanto, per $t \neq -26/5$ il sistema è incompatibile, mentre per $t = -26/5$ la matrice del sistema diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/4 & -1/4 & -13/10 \\ 0 & 1 & 1 & 14/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

e il sistema ammatte infinite soluzioni dipendenti da un parametro. Riassumendo la nostra analisi:

Parametri	**Soluzioni**
$s \neq -2, -1/2$	un'unica soluzione, per ogni t fissato
$s = -2, t \neq -1$	nessuna soluzione
$s = -2, t = -1$	infinite soluzioni, dipendenti da un parametro
$s = -1/2, t \neq -26/5$	nessuna soluzione
$s = -1/2, t = -26/5$	infinite soluzioni, dipendenti da un parametro