Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 16/10/09

Soluzione esercizi 1 e 4.

La matrice associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

L'elemento di posto $(1,1)$ è diverso da zero; in particolare è uguale ad 1. Possiamo utilizzare questo 1 per eliminare gli altri della prima colonna al di sotto della prima riga; questo è il primo passo del metodo di Gauss. Eseguiamo cioè la seguente operazione sulle righe:

$$\begin{aligned} \text{prima riga} &\to \text{prima riga} \\ \text{seconda riga} &\to \text{seconda riga} - 2 \cdot \text{prima riga} \\ \text{terza riga} &\to \text{terza riga} - 3 \cdot \text{prima riga} \end{aligned}$$

Otteniamo così la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -9 & -8 & -2 \end{array}\right)$$

L'elemento di posto $(2,2)$ è diverso da zero. Spezzaimo il secondo passo del metodo di Gauss in due operazioni. Possiamo rendere l"elemento di posto $(2,2)$ uguale ad 1 moltiplicando la seconda riga per $-1/3$ [1], ottenendo così la matrice.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & -9 & -8 & -2 \end{array}\right)$$

Adesso utilizziamo l' uno nel posto $(2,2)$ per eliminare gli elementi della seconda colonna al di sotto della seconda riga:

$$\begin{aligned} \text{prima riga} &\to \text{prima riga} \\ \text{seconda riga} &\to \text{seconda riga} \\ \text{terza riga} &\to \text{terza riga} - (-9) \cdot \text{seconda riga} \end{aligned}$$

Otteniamo la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

L'elemento di posto $(3,3)$ è diverso da zero e lo possiamo rendere uguale ad uno moltiplicando la terza riga per $-1/2$. La matrice che si ottiene è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

A questo punto l'eliminazione "a scendere" è completata. I pivot sono tutti non nulli, e dunque possiamo già concludere che il sistema ammette un unica soluzione.

[1] Notare che questa operazione è contemplata dal Lemma fondamentale

Per determinarla esplicitamente facciamo l'eliminazione "a salire": utilizziamo l'uno in posizione (3,3) per eliminare gli elementi della terza colonna al di sopra della terza riga:

$$\begin{aligned}\text{prima riga} &\to \text{prima riga} - 3 \cdot \text{terza riga}\\ \text{seconda riga} &\to \text{seconda riga} - 2/3 \cdot \text{terza riga}\\ \text{terza riga} &\to \text{terza riga}\end{aligned}$$

ottenendo così la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Adesso utilizziamo l'uno in posizione $(2,2)$ per eliminare gli elementi della seconda colonna al di sopra della seconda riga:

$$\begin{aligned}\text{prima riga} &\to \text{prima riga} - 2 \cdot \text{seconda riga}\\ \text{seconda riga} &\to \text{seconda riga}\\ \text{terza riga} &\to \text{terza riga}\end{aligned}$$

La matrice che otteniamo è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Abbiamo finito: quest'ultima matrice ritradotta in un sistema ci dice

$$\begin{cases} x = -2/3 \\ y = -2/3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Soluzione esercizio 5. La matrice del sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Scambiando la seconda riga con la prima ed operando con Gauss otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

e possiamo quindi concludere che il sistema è incompatibile.