Geometria. a.a. 2009-10. Prof. P. Piazza
Soluzioni del compito a casa del 10/08/09

Soluzione esercizio 0.

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = -1(\equiv -1+i0),\ (-i)^4 = 1,\ (3+3i)(3-3i) = 18,\ \frac{(1+2i)}{(1-2i)} = \frac{3}{5}+i\frac{4}{5}.$$

Soluzione esercizio 2. Dobbiamo determinare le radici quadrate di $w := 1-i4\sqrt{3}$. È subito visto che $|w| = \sqrt{7}$. Sappiamo che se θ è l'argomento di w allora

$$\cos\theta = \frac{1}{7}\,, \quad \sin\theta = -\frac{4}{7}\sqrt{3} \tag{1}$$

e quindi

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm 2/\sqrt{7}\,, \quad \sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{3}{7}}$$

Dalle formule per le radici n-me di un numero complesso w sappiamo che una delle due radici quadrate di w è $z_0 := |w|^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})$; l'altra deve essere per forza $-z_0$ (che può anche essere scritto come $z_1 := (|w|^{\frac{1}{2}}(\cos(\frac{\theta}{2}+\pi) + i\sin(\frac{\theta}{2}+\pi))$ in accordo con la Proposizione 4.23). Basta quindi determinare z_0; l'unico problema è decidere che segni prendere. Dalla (1) capiamo che θ si trova nel quarto quadrante; ne segue che $\theta/2$ è nel secondo quadrante e quindi

$$\cos\frac{\theta}{2} = -2/\sqrt{7}\,, \quad \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

da cui

$$z_0 = -2 + i\sqrt{3}$$

Soluzione esercizio 3. $z^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$ e quindi z^3 è reale se e solo se $(3x^2y - y^3) = 0$

Soluzione esercizio 4. Si ha $1+i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$; per la formula di de Moivre ne segue che $(1+i)^{12} = 2^6(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = -2^6$.

Soluzione esercizio 5. Per la proposizione 4.23, le radici quarte dell'unità sono

$$z_0 = 1,\ z_1 = i\,,\ z_2 = -1,\ z_3 = -i$$

Soluzione esercizio 6. L'applicazione $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ x \longrightarrow x^2 - 3x + 7$ non è suriettiva perché il discriminante del polinomio $x^2 - 3x + 7$ è negativo; quindi non ci sono soluzioni reali di $x^2 - 3x + 7 = 0$. Detto altrimenti, non ci sono $x \in \mathbb{R}$ tali che $f_1(x) = 0$. Di fatto, come da suggerimento, $f_1(x) > 0$ per ogni x in $\mathbb{R}$.
f_1 non è iniettiva perché per ogni $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(f_1)$ ci sono due soluzioni dell'equazione $x^2 - 3x + 7 = \mathbf{b}$ (tranne quando $(3^2 - 4(7-\mathbf{b}) = 0)$, o, detto, altrimenti, ci sono due elementi nel dominio, $x_{\mathbf{b}}$ e $\tilde{x}_{\mathbf{b}}$ tali che la loro immagine tramite f_1 coincide ed è uguale a $\mathbf{b}$.

$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1],\ x \longrightarrow \sin x$ è chiaramente non iniettiva perchè il seno è una funzione periodica. L'immagine è $[-1,1]$ e quindi la funzione seno non è suriettiva.

$f_3 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\ x \longrightarrow x+1$ è iniettiva e suriettiva.

$f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ x \longrightarrow 2x+5$ è iniettiva e suriettiva.

$f_5 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ $n \longrightarrow 1/n$ è iniettiva ma chiaramente non suriettiva (l'immagine è contenuta nei numeri razionali nell'intervallo $[0, 1]$). (Osservazione: avrei dovuto rimuovere lo 0 dal dominio...)

$f_6 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ $x \longrightarrow 2x$ è iniettiva ma non suriettiva, dato che ha come immagine i numeri pari.